

8/11/2010

הרצאה 4:

פרק ב: תורת היחידה

שימושים מתורת יחידה:

(1) לכל יחידה יש אטריקט היחידה

(2) כל יחידה ניתן למשכן ב- $\mathbb{R}^n$ (דבור ל-אטריקט גדול)

(3) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $X = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\}$

(א) f פתוח $\Leftrightarrow X$ סופית (גשט יסודי של האטריקט)

(ב) f אנליטית $\Leftrightarrow X$ דיסקרטית

(ג) $f \in C^k(\mathbb{R})$ $\Leftrightarrow X$ יכולה להיות כל קבוצה סגורה.

אטריקט היחידה

למון:

X יחידה טופולוגית $\Leftrightarrow X$ פה היפוקטי $\Leftrightarrow X$ ראוי, X נורמלית. $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ תהיה של אוריסון $\Leftrightarrow$ תורת היחידה

(גרה טופולוגית - גרה אטריקט)

הצגה:

כיוס $\{C_\alpha\}_{\alpha \in I}$ של X נקרא סביבתות אם לכל $x \in X$

יש סביבה W_x (קבוצה פתוחה) כן יש $W_x \cap C_\alpha \neq \emptyset$ רק למספר

סופי של אינדקסים $\alpha \in I$.

(אפשר להבין זאת: לאוסף של קבוצות שהיו כלל דווקא כיוס)

גרסא (טופולוגיה)

$C = \{C_\alpha\}$ גשמה סופית מוחלט של הקבוצות סגורות אולי $U C_\alpha$ סגור

הצגה:

כיוס $\{C_\alpha\}_{\alpha \in I}$ של X נקרא מצבון של C_α אם

$$\forall \alpha \exists \beta \text{ s.t. } C_\alpha \subseteq D_\beta$$

הצגה:

א"ל נקרא פה-היפוקטי, אם לכל כיוס פתוח ק"ל מצבון סופי מוחלט

הוכחה:

כל יחידה סופית X היא סדר קומפקטית.

הוכחה:

הוכחה:

X נותנת סדר $\mathcal{K}$ כ"י: $X = \bigcup K_i$ של קבוצות קומפקטיות K_i כן ש-
 $K_i \subseteq \text{Int}(K_{i+1})$ אם $K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \dots$

הוכחת השלמה:

ייתכן שיהיה סופית

X היא $\mathcal{K}$ כ"י $\iff$ קיים כוס $\{W_i\}$ כן גונה $\{W_i\}$ כן ש- $\overline{W_i}$ הוא קומפקטית

נסביר: $K_1 = \overline{W_1}$ (נהיה אפקט האינפניטי כן ש- $K_1 \subseteq W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_n$ קיים של $\mathcal{K}$ כ"י)

ונסביר: $K_2 = \overline{W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_n}$ (איחוד סדר של קומפקטים ולכן קומפקט)

וממשיכים באינדוקציה.

הוכחת השלמה:

נקח K_i כלו כמנה, $K_i = \emptyset$ $i \leq 0$.

נסביר ש- $W_i = \text{int}(K_{i+1} \setminus K_{i-2})$ $C_i = K_i \setminus \text{int}(K_{i-1})$

פתוחות סגורות תת קבוצה סגורה קומפקטית קומפקטית

(נשים לב ש- $C_i = K_i \cap \text{Int}(K_{i-1})^c \subset \text{Int}(K_{i+1}) \cap (K_{i-2})^c = W_i$)

הוכחה: $K_j \subset \text{Int}(K_{j+1}) \subset \bigcup_{i=1}^j W_i$

$\iff \{W_i\}$ כוס $\mathcal{K}$ של X

נשים לב ש- $K_j = \bigcup_{i=1}^j C_i$ ולכן $\bigcup C_i = X$

נקח כוס $\mathcal{U}$ פתוח במרחב של X . $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ (נראה שיש לו בדיון

סופי גלוי).

נסביר: $U_{\alpha,i} = U_\alpha \cap W_i$

$U_i = \{U_{\alpha,i}\}_{\alpha \in I}$ $\forall i \in \mathbb{N}$ (נשים לב שזה כוס פתוח של W_i)

קבלנו $\{U_{\alpha,i}\}_{i \in \mathbb{N}, \alpha \in I}$ כוס פתוח שמכיל את הכוס הקובץ.

$\mathcal{C}$ קולקציה $\Leftarrow$ ק"פ לתת כיסוי של $\mathcal{C}$: $V_{i,1}, \dots, V_{i,n}$ מתן U .

$$U = \{ V_{i,j} \mid i \in N, 1 \leq j \leq N_i \} \leftarrow (\text{מה העדכון הראשון})$$

נראה שהוא סופי הקואלי:

יהי $x_0 \in X$ ונתון (i_0, j_0) כן ש- $x_0 \in V_{i_0, j_0}$

נשים לב ש- $x_0 \in W_{i_0}$

נשים לב ש- $W_{i_0} \cap W_i = \emptyset$ כן $i \geq i_0 + 3$

ולכן $\phi = V_{i,j} \cap V_{i_0, j_0} = \emptyset \quad \forall i \geq i_0 + 3$ ולכן יש רק גבול סופי

של קבוצות כיסוי שנחתך ב- V_{i_0, j_0}



לעניין

אולי
הקבוצה

X יחידה סופית $\Leftarrow X$ האפריורי (אם יש נקודה וקבוצה סגורה

אז קיימים קבוצות פתוחות כגון - אחת מכילה את הנקודה והשניה אינה מכילה

הסגורה).

הוכחה:

תהי F סגורה $x \notin F$. לכל $y \in F$ נתון מכיוון קבוצת פתוחות

U_y, V_y כגון $y \in V_y, x \in U_y$ (כי X האוסטרלי)

נתבונן בכיסוי הפתוח של x : $\{ V_y \}_{y \in F}$

מה קולקציה $\Leftarrow$ ק"פ לתת כיסוי סופי הקואלי $\{ W_i \}$

(כדור) $V = \{ W_k \mid W_k \cap F \neq \emptyset \}$ קבוצת פתוחות F המכילה את x

$\{ W_k \}$ סופי הקואלי $\Leftarrow$ ק"פ לתת כיסוי סופי U' שפתוח

הגבול סופי $W_{k_1}, W_{k_2}, \dots, W_{k_n}$

אם W_{k_i} פגש את F (ואתן אתה בעצמך לו נקודה)

אולי הוא הכולל באינסוף V_y (כדור)

$$U = U' \cap (U_{y_1} \cap \dots \cap U_{y_n})$$

פתוחה ומכילה את x וכן $U \cap V = \emptyset$

למטה: X ירדה טופולוגיה $\Leftarrow X$ רגילה

$\Downarrow$

למעלה: X רגילה טופולוגיה $\Leftarrow X$ נורמליזציה

הוכחה:

אם F, F' פחות. המעלה המוגדרת, $\forall x \in F$ היתה סביבות

פתוחות לחץ $x \in U_x, F' \subseteq V_x$. כלת נתכונת באופן:

$$U(X \setminus F) = \bigcup_{x \in F} U_x$$

"ונחזור על הסיווג הקודם" (תמיד) הדיון:

נדבור לכיוון סוף הקו, $\{W_i\}$

$$U = \bigcup \{W_k \mid W_k \cap F \neq \emptyset\}$$

כעת הוכחה פתוחה המכילה את F .

עכש $y \in F'$ קיימת סביבה פתוחה H_y החותכת את F סביב y .

$(W_{x_1}, \dots, W_{x_n})$ כלל קודם, אם (W_{x_i}, y) פחות את F .

אזי היא חייבת להיות גולת $U_{x_i}(y)$.

$$G_y = H_y \cap \{V_{x_1}(y) \cap \dots \cap V_{x_n}(y)\}$$

והוכחה:

$$V = \bigcup_{y \in F'} G_y$$

וכעת הקבוצה הפתוחה המכילה את F .

למעלה:

אם X נורמליזציה אזי כל x פחות U_x פחות $U = U_1 \cup \dots \cup U_n$ יש חלוקה יחידה

הוכחה:

הוכחה:

אנחנו גוראים חלוקה יחידה לקור M קומפאקט (כל x פחות U_x פחות U)

המקרה הקשה בשביל לבדוק את המקרה הכללי (III) יפס בדרך גורם (III)

הפונקציה של אוריסון : (כזיבה / חסרה)

X נורמלי, A, B סבורות $\Rightarrow$ $f|_A = 1$ $\Rightarrow$ $f|_B = 0$ $\Rightarrow$ $f|_A = 1$ $\Rightarrow$ $f|_B = 0$

$$\text{supp}(f) \subseteq X \setminus B \quad \text{כך ש-} \quad f|_A = 1 \quad \text{כך ש-} \quad f|_B = 0$$

הוכחת הטענה:

נניח $X = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_n$ $\Rightarrow$ X כיסוי של X $\Rightarrow$ $X = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_n$ $\Rightarrow$ X כיסוי של X

$$\bar{V}_k \subseteq U_k$$

הסבר:

$$A = X \setminus (U_1 \cup \dots \cup U_n)$$

X נורמלי $\Rightarrow$ קיימת פתוחה V_1 כך ש-

$$A \subseteq V_1 \subseteq \bar{V}_1 \subseteq U_1$$

האוסף: $V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_n$ $\Rightarrow$ X כיסוי של X

נניח שהפונקציה $f|_{V_1}, \dots, f|_{V_{k-1}}$ $\Rightarrow$ $f|_{V_k}$ $\Rightarrow$ $f|_{V_k}$

$$B = X \setminus (V_1 \cup \dots \cup V_{k-1} \cup V_{k+1} \cup \dots \cup V_n)$$

ואז U_k $\Rightarrow$ U_k $\Rightarrow$ U_k $\Rightarrow$ U_k

נחשוב על אותה הסימון הפשוט עבור הכיסוי $V_1 \cup \dots \cup V_n$

נקבל מצד כיסוי (פתוח סגור) $\Rightarrow$ $f|_{V_k}$ $\Rightarrow$ $f|_{V_k}$ $\Rightarrow$ $f|_{V_k}$

$$\bar{W}_k \subseteq V_k \subseteq \bar{V}_k \subseteq U_k$$

נשתמש בזה כדי לבנות פונקציה של אוריסון עבור $X \setminus V_k$ $\Rightarrow$ $\bar{W}_k$

$$\phi_k: X \rightarrow [0,1] \quad \phi_k(x) = \begin{cases} 1 & x \in \bar{W}_k \\ 0 & x \in X \setminus V_k \end{cases}$$

$$\text{supp}(\phi_k) \subseteq \bar{V}_k \subseteq U_k$$

נבנון באוסף $\phi_1, \dots, \phi_n$ $\Rightarrow$ $\phi_1, \dots, \phi_n$ $\Rightarrow$ $\phi_1, \dots, \phi_n$

אחרת זהו שווה 0

$$\psi_k = \frac{\phi_k}{\phi_1 + \dots + \phi_n}$$

קיימת הפונקציה של פונקציות חסרות ψ_k $\Rightarrow$ ψ_k $\Rightarrow$ ψ_k

$$\sum \psi_k = 1 \quad \text{על קוואס חסרת חסרת כיסוי של U_k }$$

הוכחה:

הוכחנו קודם של חלקה של M (אולי) חלקה של אוריסון (חלקה חלקה)

הוכחה:

בדקה הבאה (ייתכן שאז דווקא קודם) נראה באופן כללי של פונקציות $\sum_{\alpha \in I} \psi_\alpha = 1$ אבל כל $x \in M$ יש M חלקה של $\psi_\alpha(x) \neq 0$ עבור $\alpha \in I$

החלקה של אוריסון (חלקה חלקה)

הוכחה:

$K \subseteq \mathbb{R}^n$ קודם סוף, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה של K סביבה

אולי קי"מ - חלקה חלקה C^∞ $f|_K = 1$ וכן $\text{supp}(f) \subseteq U$

הוכחה:

$h: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ $h(t) = \begin{cases} e^{-1/t^2} & t \neq 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases}$ (היא C^∞ אבל לא אנליטית)

$$h_-(t) = \begin{cases} e^{-1/t^2} & t < 0 \\ 0 & t \geq 0 \end{cases} \quad h_+(t) = \begin{cases} e^{-1/t^2} & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

(חלקה כלשהו של חלקה חלקה) $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ $k(t) = h_-(t-b) \cdot h_+(t-a)$ (ספור)

