

7/11/2016

הרצאה 3

פרק א: יחידות סופוסיות

פרק ב: יחידות חלקיות

יחידה חלקית M היא יחידה סופוסית M - יחידה חלקית

כחלק מהיחידה של אטומים / אטומים חלקיים

$$A \cup \bar{A} \quad (M, \bar{A}) \quad (M, A)$$

הצורה 1:

$f: M \rightarrow R$ נקראת חלקית אם לכל $x \in M$ יש זכר

$$(u, \varphi) \in A \quad \text{כך ש} \quad x \in u \quad \text{ו} \quad f \circ \varphi^{-1}: \varphi(u) \rightarrow R \quad \text{חלקית}$$

הצורה 2:

$f: M \rightarrow R$ חלקית אם לכל $(u, \varphi) \in A$ ההרכבה

$$f \circ \varphi^{-1}: \varphi(u) \rightarrow R \quad \text{חלקית}$$

טענה: ההכרחיות שקולות

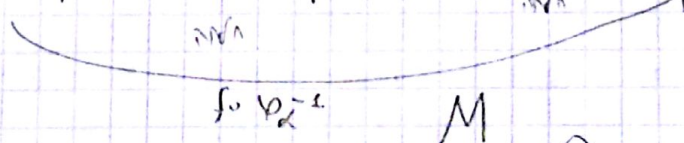
נקח $(u, \varphi) \in A$ כשמוכח, ונקח $x \in u$ "לחיתוך"

נוכל שיש יחידה סופוסית $x \in (u_\beta, \varphi_\beta)$ קיים

$$f \circ \varphi_\beta^{-1}: \varphi_\beta(u_\beta) \rightarrow R \quad \text{חלקית}$$

$$f \circ \varphi_\beta^{-1}: \varphi_\beta(u_\beta) \rightarrow R \quad \text{נשים לב ש:}$$

$$\varphi_\beta(u_\beta) \xrightarrow{\varphi_\beta \varphi_\alpha^{-1}} \varphi_\alpha(u_\alpha \cap u_\beta) \xrightarrow{f \circ \varphi_\alpha^{-1}} R$$



חלקית $f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ ומה נכון לכל נק' $x \in u_\alpha$ וכן $f \circ \varphi_\beta^{-1}$ חלקית

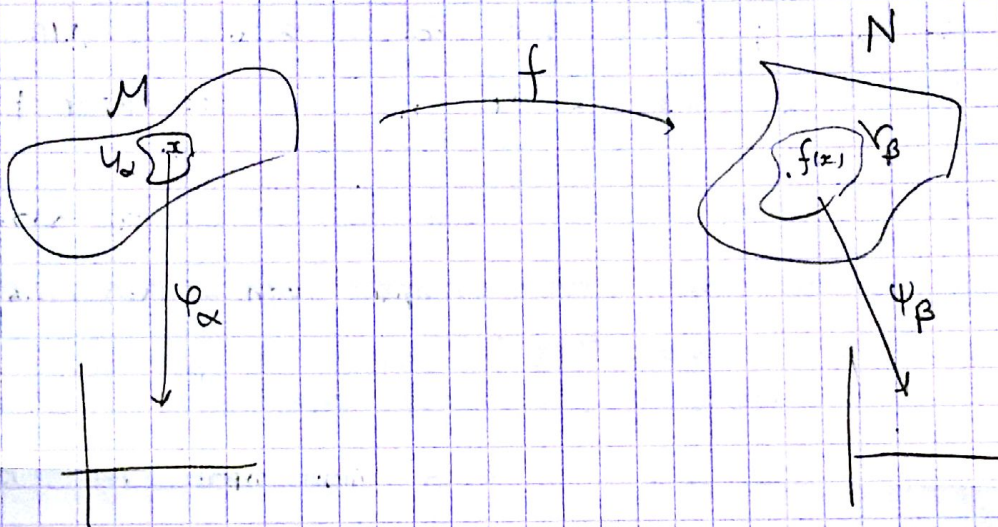
נתונות 2 תחומי חסוקר (M, A) ו- (N, B)

השערה:

$f: M \rightarrow N$ תכונות חסוקר אב:

כל נקודה $x \in M$ יש לה $(\varphi_x, U_x) \in A$ סביב x ומה $(\psi_\beta, V_\beta) \in B$ סביב $f(x)$ כך ש- $f(U_x) \subseteq V_\beta$

חסוקר $\psi_\beta \circ f \circ \varphi_x^{-1}: \varphi_x(U_x) \rightarrow \psi_\beta(V_\beta)$



השערה 2:

$f: M \rightarrow N$ כל חסוקר אב כל סביב $(\varphi_x, U_x) \in A$, $(\psi_\beta, V_\beta) \in B$ כך ש- $f(U_x) \subseteq V_\beta$ מתקיים ש-

חסוקר $\psi_\beta \circ f \circ \varphi_x^{-1}: \varphi_x(U_x) \rightarrow \psi_\beta(V_\beta)$

הערות:

(1) שטח ההשערה האחרונה שקול (תבוא: אותו סמלון כמו קודם)

(2) $f: M \rightarrow N$ רצוף נקראת חסוקר אב:

$\psi_\beta \circ f \circ \varphi_x^{-1}: \varphi_x(U_x \cap f^{-1}(U_\beta)) \rightarrow \psi_\beta(f(U_x) \cap U_\beta)$

(3) "כליות" $\Leftarrow$ רצפות: החב:

(u, ψ) מה סביב p . (v, φ) מה סביב $f(p)$.

(4) לא תמיד קיים מה מה חסוקר אב יחידה סופרלימטר. נכון (קיים עמוד) בקורס

למשל $\mathbb{R}^7$ יש 15 מבנים חסוקר שונים. $\mathbb{R}^4$ יש 4 (מבנים אנטיסימטריים)

על מרחב וקטורי

על מרחב וקטורי $A_2 = (\mathbb{R}, u(x)=x^3), A_1 = (\mathbb{R}, Id), \mathbb{R}$

הערה:

$u: (\mathbb{R}, A_1) \rightarrow (\mathbb{R}, A_2)$ ו u הייתה ההעתקה $(\mathbb{R}, A_2) \cong (\mathbb{R}, A_1)$

$u^{-1}: (\mathbb{R}, A_2) \rightarrow (\mathbb{R}, A_1)$ -

כך u^{-1}, u - שווה

$f: x \rightarrow x^3, f: (\mathbb{R}, A_1) \rightarrow (\mathbb{R}, A_2)$

f חסקה $\iff u^{-1} \circ f \circ Id: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ חסקה
 f^{-1} חסקה $\iff Id \circ f^{-1} \circ u$ חסקה

(5) הוכחה של חסקות היא חסקה. ההעתקה הפהורה היא חסקה. מכאן של

יכולת חסקה היא חסקה.

(6) המושג של יכולת חסקה קצת פחות אינטואיטיבי.

תהי M^m יחידה חסקה מממד m , ואז שתי קבוצה $N \subset M$ היא

יחידה n - ממדית של M אם

$\forall x \in N, \exists \text{ chart } (u, \phi) \text{ of } M \text{ s.t. } u \cap N = \phi^{-1}(\mathbb{R}^n) = \phi^{-1}(\mathbb{R}^n \times \{0\})$
 $x \in u$

$\phi(u \cap N) = \phi(u) \cap \mathbb{R}^n = \{x \in \phi(u) \mid x_{n+1} = \dots = x_m = 0\}$

הערה:

N היא יחידה חסקה.

סקיצה:

$A = \{u_x \cap N, \phi|_{u_x \cap N} \mid (u_x, \phi) \text{ chart in } M \text{ near } x \in N \text{ s.t. } \phi^{-1}(\mathbb{R}^n) = u_x \cap N\}$

המשמעות של זה אולי לא ברורה.

$X := u \cap N$ מה של M (ϕ, u, γ) ?

$Y := \pi \circ \phi(X)$

$\pi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ העתקה סטנדרטית

$\psi = \pi \circ \phi$

N מה של (ψ, X, Y)

$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ שים לב $j: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

$\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1} = \pi \circ \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} \circ j$

כאן

תלכורת מרחב 3:

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, חתקה, 0 בתן ראשון (הזכרונות הוא על) אכן

$f^{-1}(0)$ תת יחידה של $\mathbb{R}^n$ ממידת $m-n$

(משפט הפונקציה הסתמה, יש סביבה שבה התמונה המפונה הוא על של

פונקציה: $\exists u \in \mathbb{R}^{m-n}, \forall v \in \mathbb{R}^m$ s.t. $f^{-1}(0) \cap \{u + v\} = \{u, f(u)\}$

כה ניתן על קווינטל מקומות על $x \in f^{-1}(0)$

דוגמאות:

(1) $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ תת יחידה חתקה ממידת n : $f(x_1, \dots, x_{n+1}) = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2}$

חתקה על $\{0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$. מספר דגמא כיוון שבו הנפחת הכוונות לא אופס+

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(x + tx) = \dots = 1$$

(2) $SL(n, \mathbb{R})$ יחידה חתקה (תת יחידה חתקה של $\mathbb{R}^{n^2}$ ממידת n^2-1)

על: $f(A) = \det(A)$. חתקה $f: \mathbb{R}^{n^2} \rightarrow \mathbb{R}$ וכל קודם יש כיוון שבו הנפחת

הכוונות $\neq 0$.

(3) $O(n)$ יחידה חתקה ממידת $\frac{n(n-1)}{2}$. $(AA^T = I)$

(סדור: $f: \mathbb{R}^{n^2} \rightarrow \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ מסרבות מסרבות מסרבות כוונות)

$$O(n) = f^{-1}(I) \quad f(A) = A \cdot A^T$$

תרגיל:

$$DF_A(M) = MA^T + AM^T$$

$$(DF_A(KA) = K + K^T$$

(טריק: נח $M = KA$)

על מסרבות מסרבות, עקומת $K = \frac{S}{2}$ (הנסיס עקומות שהזכרונות הוא על)

$$n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \quad \text{מידת: מידת}$$