

24/11/2017

חומר חדש

הרצאה 26

בסוף השיעור שמר (Zig-Zag - סדרה)

השלב האחרון בהוכחה:

הסדרה: $\dots \xrightarrow{j} H^n(A^*) \xrightarrow{\alpha^n} H^n(B^*) \xrightarrow{\dots} \dots$ מדייקת.

$$\alpha^n \delta [c] = [d\beta_{n-1}] = 0 \quad (\text{באיד}) \quad \delta [c] \in H^n(A^*)$$

$$\text{Im}(\delta) \subseteq \text{Ker}(\alpha^n)$$

כיוון השני: הבה נותן: $\alpha^n \alpha_n = d\beta_{n-1}$ ונקח $b^{n-1} \beta_{n-1}$.

$$\delta b^{n-1} \beta_{n-1} = (\alpha^n)^{-1} \circ d \circ (b^{n-1})^{-1} b^{n-1} \beta_{n-1} = \alpha_n$$

"Mayer-Vietoris" שיוויון

משפט

$M = U \cup V$ יחידה חלקה אורתגונלית. $U, V \subset M$ פתוחות ק ש $M = U \cup V$.

אזי לכל $n \in \mathbb{N}$ יש הומומורפיזם:

$$(\text{connecting homomorphism}) \delta: H^n_{dR}(U \cup V) \longrightarrow H^{n+1}_{dR}(M)$$

כך ש:

$$\dots \xrightarrow{\delta} H^n_{dR}(M) \xrightarrow{k^* \oplus l^*} H^n_{dR}(U) \oplus H^n_{dR}(V) \xrightarrow{i^* - j^*} H^n_{dR}(U \cup V) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}_{dR}(M) \xrightarrow{\dots}$$

$$\begin{array}{ccc} U \cup V & \xrightarrow{i} & U \\ j \downarrow & & \downarrow k \\ V & \xrightarrow{l} & M \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^n(M) & \xrightarrow{k^*} & \Lambda^n(U) \\ l^* \downarrow & & \downarrow i^* \\ \Lambda^n(V) & \xrightarrow{j^*} & \Lambda^n(U \cup V) \end{array}$$

הוכחה:

סדרה ה-Zig-Zag (נבדל שהספיק שהראת שהסדרה חסומה):

$$0 \longrightarrow \Lambda^n(M) \xrightarrow{k^* \oplus l^*} \Lambda^n(U) \oplus \Lambda^n(V) \xrightarrow{i^* - j^*} \Lambda^n(U \cup V) \longrightarrow 0$$

בדיקת אחר שלוש מתכונות:

$$(k^* \oplus l^*)(\omega) = (\omega|_U, \omega|_V) = 0 \quad (\text{נוח}). \quad \omega \in \Lambda^n(M) \quad \text{נקח} \quad k^* \oplus l^* \quad (I)$$

$$(U \cup V = M \quad \text{כי} \quad \omega = 0 \iff$$

(II) נראה הכלה כפולה :

$$(i^* - j^*)(k^* \oplus l^*)(\omega) = (i^* - j^*)(\omega|_U, \omega|_V) = \omega|_{U \cap V} - \omega|_{U \cap V} = 0$$

$$\text{Im}(k^* \oplus l^*) \subseteq \ker(i^* - j^*)$$

$$\omega|_{U \cap V} = \omega'|_{U \cap V} \iff (i^* \omega = j^* \omega') \quad (\omega, \omega') \in \mathcal{W}(i^* - j^*) \quad \text{נקח}$$

כלל קוונט - תכונות σ של M ש $\sigma|_U = \omega, \sigma|_V = \omega'$?
 $\left(\sigma = \begin{cases} \omega \text{ on } U \\ \omega' \text{ on } V \end{cases} \right)$
 $\{\phi, \psi\}$

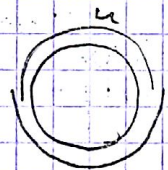
(III) נרצה להוכיח ש- $i^* j^*$ הוא כל. (נקח "חלוקת יחידה" עבור הכוונות $\{U, V\}$)

תהי $\omega \in \Lambda^1(U \cap V)$ (כזכור)

$$\eta' = \begin{cases} -\phi \omega & \text{on } U \cap V \\ 0 & \text{on } V \setminus \text{supp } \phi \end{cases}, \quad \eta = \begin{cases} \psi \omega & \text{on } U \cap V \\ 0 & \text{on } U \setminus \text{supp } \psi \end{cases}$$

$$(i^* - j^*)(\eta, \eta') = i^* \eta - j^* \eta' = \psi \omega - (-\phi \omega) = \omega \quad \text{קבלנו}$$

ובכן הוא כל וסיימנו.



$M = S^1$

הערה:

$\mathbb{R}$ (כחומר וקטורי)

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(S^1) &\rightarrow H^0(U) \oplus H^0(V) \xrightarrow{\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}} H^0(U \cap V) \rightarrow \\ &\xrightarrow{d} H^1(S^1) \rightarrow H^1(U) \oplus H^1(V) \xrightarrow{0} H^1(U \cap V) \rightarrow H^2(S^1) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

? $\underbrace{0 \oplus 0}_\text{Poincaré} \quad \quad \quad 0$

תרגילים - להוכיח שכל סדרה חצונית (קדם) מתפרקת: $0 \rightarrow A^1 \rightarrow A^2 \rightarrow \dots$

$$(-1)^k \dim A^k = 0 \quad \text{התרגילים :}$$

$$\dim H^1(S^1) = 1 \quad \text{ומכאן (קדם) ש-}$$

משפט Mayer-Vietoris של פול

הדמיון:

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \xrightarrow{\alpha} & B & \xrightarrow{\beta} & C & \xrightarrow{\gamma} & D & \xrightarrow{\delta} & E \\ \downarrow a & & \downarrow b & & \downarrow c & & \downarrow d & & \downarrow e \\ A' & \xrightarrow{\alpha'} & B' & \xrightarrow{\beta'} & C' & \xrightarrow{\gamma'} & D' & \xrightarrow{\delta'} & E' \end{array}$$

חצונית, קומוטטיביות

$$C \longleftarrow C' \quad \text{אילוטרופים} \quad a, b, d, e \quad \text{אילוטרופים}$$

: Poincaré duality

$(H_c^*(M)) \quad \omega \in \Omega_c^*(M)$ - קואסיסימילר גרמאנה של תכונות של תחביר קואסיסימילר

$$\int: H_{dR}^k(M) \otimes H_{dR}^{n-k}(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(\omega, \eta) \longrightarrow \int \omega \wedge \eta$$

פונקציונל של סטרו:

$I: H_{dR}^k(M) \longrightarrow (H_c^{n-k}(M))^*$ ומה איזומורפיזם.

סקיצה של הוכחה:

$$H_{dR}^{k-1}(U) \otimes H_{dR}^{k-1}(V) \longrightarrow H_{dR}^{k-1}(U \cap V) \longrightarrow H_{dR}^k(U \cup V) \longrightarrow H_{dR}^k(U) \otimes H_{dR}^k(V) \longrightarrow H_{dR}^k(U \cap V)$$

$$\downarrow \quad \quad \quad \downarrow I_{U \cap V} \quad \quad \quad \downarrow I_{U \cup V}$$

$$(H_{dR}^{k-1}(U))^* \otimes (H_{dR}^{k-1}(V))^* \longrightarrow (H_{dR}^{k-1}(U \cap V))^* \longrightarrow \dots$$

מסגרת ההמשך נקרא שם $I_U \otimes I_V$, איזומורפיזם

$$\longleftarrow I_{U \cup V} \text{ איזומורפיזם}$$

סקיצה (של הוכחה):

אם עיריכה יש "כיסוי טוב" $\longleftarrow I_M$ איזומורפיזם. (כיסוי טוב הוא

כיסוי כך שכל תת אוסף סופי של $U_1, \dots, U_k$ הוא כולל.)

what next? (personal opinion)

⊙ mfd + extra structure - Lie group $M=G$

$$\mathfrak{g} = T_e G \quad \text{Lie Alg.}$$

(מחזור יקרה הרקטריזציה אינפיניטסימלית של האוטומטיות של G)

בנקודה הבה יש דרך לבנות את כל המרחקים המשוקים $T_x M$

סקיצה:

$$\mathfrak{g} = T_e G \quad \text{הייס יחיד G כך ש}$$

סקיצה:

$$G/H \longleftarrow M \triangleleft G \quad (\text{מרחק הומוגנים})$$

⊙ complex mfd:

הפחד "דומה": הסבס המפורסם - הומומורפיזם.

$d + \bar{\partial}$ - Dolbeault cohomology

של אינווריאנט סטנדרטי (ולאו בדרך הדדוקט)

⊙ Vector bundles: TM , tensor bundle $(\Lambda^k(M))$ (locally free sheaf)

Invariants called characteristic classes $\in H_{dR}^*(M)$

① mfld with special tensors

② Riemannian geometry. (Geodesic, metric, curvature) -
all these measure distance from euclidean structure

③ Thm [Gauss - Bonnet] (M^2, g)

$\int_M$ s.c. topological invariant
sectional curvature

"הקשר הכתור של התחמיקה במרחב ה-19"

④ Symplectic "Geometry"

Hamiltonian - δ זכר δ
Dynamics - $|\varphi^* \omega = \omega|$

$M, T_x M, \langle \cdot, \cdot \rangle$

$T_x M, \omega(\cdot, \cdot) \sim$ אי-סימטריה דא מנוונת

$\text{Symp}(M, \omega) = \{ \varphi \mid \varphi^* \omega = \omega \}$ - קבוצת ה- ω מחדשות

⑤ Almost complex str.

$T_x M : J_x^2 = -Id$

almost complex structure is a complex str iff $\square = 0$

⑥ Atiyah - Singer index theorem - based on all of the above

הוכח מרחיב של התחמיקה במרחב ה-20