23/1 אלגברה 2 - הרצאה מספר 1

הגדרה 1 chain complex

$$\{(C_n, \partial_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

$$\cdots \to C_{n+1} \to C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \to \cdots$$

$$\partial_{n-1}\circ\partial_n = 0$$

$$C_* = \bigoplus C_n$$

סכום ישר

n-cycles $Z_n = \ker\partial_n$

n-boundaries $B_n = \operatorname{Im}\partial_{n+1}$

$$H_n(C_*) = Z_n / B_n$$

הומולוגיה ה-n-ית

$$C_* = \{(C_n, \partial_n)\} \qquad \tilde{C}_* = \{(\tilde{C}_n, \tilde{\partial}_n)\}$$

chain map $f: C_* \to \tilde{C}_*$

$$\begin{array}{ccc} C_n & \xrightarrow{f_n} & \tilde{C}_n \\ \downarrow{\scriptstyle\partial_n} & & \downarrow{\scriptstyle\tilde{\partial}_n} \\ C_{n-1} & \xrightarrow{f_{n-1}} & \tilde{C}_{n-1} \end{array}$$

סדרה מדויקת קצרה s.e.s

$$0 \to A \xrightarrow{a} B \xrightarrow{b} C \to 0$$

גם אפס

העתקת אפס

$0 \to 0_A$

כי מרחבים מכילים אפס

כל סדרה מדויקת מגדירה

$$0 \to A \xrightarrow{a} B$$

כלומר a חח"ע

$$B \xrightarrow{b} C \to 0$$

כלומר b על

כנ"ל עבור = סדרה כנ"ל

אם $0 \to A_* \xrightarrow{a_*} B_* \xrightarrow{b_*} C_* \to 0$

$$\forall n \quad (0 \to A_n \xrightarrow{a_n} B_n \xrightarrow{b_n} C_n \to 0)$$

מדויקת קצרה

משפט: (zig-zag) בהינתן s.e.s של cochain complexes

$$0 \longrightarrow A^* \xrightarrow{a^*} B^* \xrightarrow{b^*} C^* \longrightarrow 0$$

$$\forall n \ \exists \left(\begin{smallmatrix}\text{connecting}\\ \text{homomorphism}\end{smallmatrix}\right) \ \delta: H^n(C^*) \to H^{n+1}(A^*)$$

$$\text{s.t.} \quad \cdots \xrightarrow{\delta} H^n(A^*) \xrightarrow{a_n} H^n(B^*) \xrightarrow{b_n} H^n(C^*) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(A^*) \quad \underline{\text{is exact}}$$

הוכחה:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & A^n & \xrightarrow{a^n} & B^n & \xrightarrow{b^n} & C^n & \to & 0\\
 & & \downarrow d & & \downarrow d & & \downarrow d & & \\
0 & \to & A^{n+1} & \xrightarrow{a^{n+1}} & B^{n+1} & \xrightarrow{b^{n+1}} & C^{n+1} & \to & 0\\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & A^{n+2} & \xrightarrow{a^{n+2}} & B^{n+2} & \xrightarrow{b^{n+2}} & C^{n+2} & \to & 0
\end{array}$$

נגדיר: $"\delta := (a^{n+1})^{-1} \circ d \circ (b^n)^{-1}"$

(לא באמת)

יהי $\gamma_n \in C^n$

b^n על $\Leftarrow$ $\exists \beta_n \in B^n \quad b^n(\beta_n) = \gamma_n$

(מספיק לדרוש ש- $d\gamma_n = 0$)

קומוטטיביות! (הדיאגרמה) $\Leftarrow$ $\overset{d(d\gamma_n)}{\downarrow}$ $0 = d\, b^n \beta_n = b^{n+1} d\beta_n$

$\Leftarrow$ $d\beta_n \in Ker(b^{n+1}) = Im(a^{n+1})$

$\exists! \ \alpha_{n+1} \in A^{n+1} \quad a^{n+1}\alpha_{n+1} = d\beta_n$

חח"ע

נראה: קומוטטיביות $\Leftarrow$

$$a^{n+2} d\alpha_{n+1} = d\, a^{n+1}\alpha_{n+1} = d(d\beta_n) = 0$$

מכיוון ש- a^{n+2} חח"ע $\Leftarrow$ $d\alpha_{n+1} = 0$

לסיכום עשינו הגדרנו העתקה שמעבירה מחזורים ב- C^n למחזורים ב- A^{n+1}

נראה שההגדרה "טובה"

(I) נניח שבחרנו גם $b^n\beta_n = \gamma_n$, $b^n\beta_n' = \gamma_n$

$$\left(b^n(\beta_n' - \beta_n) = 0\right)$$

$$\text{exactness} \Rightarrow \exists \alpha_n \in A^n \quad a^n\alpha_n = \beta_n' - \beta_n$$

$$\text{commutativity} \Rightarrow d(\beta_n' - \beta_n) = a^{n+1} d\alpha_n$$

מהסעיף הקודם ←

$$a^{n+1}(x - x' - d\alpha_n) = 0 \Leftarrow \begin{cases} \exists x \quad a^{n+1}x = d\beta_n \\ \exists x \quad a^{n+1}x' = d\beta_n' \end{cases}$$

ולכן $\Leftarrow$

סגור $\quad x - x' - d\alpha_n = 0$

(II) נראה שההגדרה משרה העתקה מוגדרת היטב ← היא כי של הקו-הומולוגיה

נניח $\gamma_n = d\gamma_{n-1} \in C^n$

על $b^{n-1} \Rightarrow \exists \beta_{n-1}, \quad b^{n-1}\beta_{n-1} = \gamma_{n-1}$

ומהחילופיות $\Leftarrow$

$$b^n d\beta_{n-1} = db^{n-1}\beta_{n-1} = d\gamma_{n-1} = \gamma_n$$

$$\Rightarrow d\beta_{n-1} = \beta_n \Rightarrow d\beta_n = 0$$

מפני לכן מתקיים $\Leftarrow$ $\quad a^{n+1}\alpha_{n+1} = d\beta_n = 0$

$$\left(\delta([\gamma_n]) = [\alpha_{n+1}]\right)$$

$d\alpha_{n+1} = 0$

(III) **exact** $\quad \dots \xrightarrow{\delta} H^n(A^*) \xrightarrow{a_n} H^n(B^*) \xrightarrow{b_n} H^n(C^*) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(A^*) \to .$

ניקח אז $\delta[c] \in H^n(A^*)$ נפעיל את a^n

$$\boxed{Im(\delta) \subseteq ker(a^n)} \Leftarrow a^n\delta[c] = [d\beta_{n-1}] = [0]$$

$\supseteq$ ניקח $a^n\alpha_n = d\beta_{n-1}$

מהגדרת הדלתא שלו היא

הנחה

מגדירים כך

אינטואיציה: $\quad \delta = (a^n)^{-1} \circ d \circ (b^{n-1})^{-1}$

אז

$$\delta^{-1} = \left((a^n)^{-1} \circ d \circ (b^{n-1})^{-1}\right)^{-1} = b^{n-1} \circ d^{-1} \circ a^n$$