

אור

$$\int : \Omega_c^n(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$

מכשיר M^n אורניסקוליות

Stokes

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega$$

M - M^{n-1} אורניסקוליות, M^n אורניסקוליות, $\omega \in \Omega_c^{n-1}(M)$

$\omega = f(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ כה"כ $M = \mathbb{R}^n$ נחלק

$$d\omega = \partial f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \partial f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \int_{-\infty}^{\infty} \partial f dx_n = 0$$

Fubini

$= 0$ מכיון ש- $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ - f קטנה במהירות

נבדוק את $M = H^n$ (נוח לחישוב כי המפה קלה)

$$\partial H^n = \{x_1 = 0\} \cong \mathbb{R}^{n-1}$$

(חצי המישור העליון)

$$\omega = f(x) dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$$

מרחב $\mathbb{R}^n$

$$\int_{H^n} d\omega = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n \int_{-\infty}^{\infty} \partial f dx_1 = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(0, x_2, \dots, x_n) dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n = \text{קובץ}$$

$$= \int_{\partial H^n} \omega$$

מרחב $\mathbb{R}^n$

$$\omega = f(x) dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_{n-1}$$

כה"כ

$$T_x H^n = \{ ? \}$$

תמונה

$$\omega|_{\partial H^n} = 0$$

כאשר הכוונה היא ש- ω מוגדרת על ∂H^n היא 0

110 33N

כיוון ש $\{U_\alpha, \Phi_\alpha\}_\alpha$ פתח (סדרה) חסומה יחידה $\{f_\alpha\}_\alpha$.

(חלוקת יחידה נותנת לנו מהפוך אות המספר המעבאם, עקומי).

דוגמא: $M = \mathbb{H}^n$ ו- $M = \mathbb{R}^n$. מרחב אוקלידי

$$\int_M d\omega = \sum_{\alpha} \int_{\phi_{\alpha}(U_{\alpha})} (\phi_{\alpha}^{-1})^* d(f_{\alpha} \omega) = \sum_{\alpha} \int_{\phi_{\alpha}(U_{\alpha})} d((\phi_{\alpha}^{-1})^* (f_{\alpha} \omega)) =$$

ספי התקרוס שהוכח

$$= \sum_{\alpha} \int_{\partial \Phi_{\alpha}^{-1}(U_{\alpha})} (\Phi_{\alpha}^{-1})^* (f_{\alpha} \omega) = \sum_{\alpha} \int_{\Phi_{\alpha}(\partial M \cap U_{\alpha})} (\Phi_{\alpha}^{-1})^* (f_{\alpha} \omega) = \int_{\partial M} \omega$$

סקנות:

plon pms $G \subset \mathbb{R}^2$ $\partial = \partial G$, $f, g \in C^\infty(G) \leftarrow$

$$\alpha = f dx + g dy$$

$$\oint_C f dx + g dy = \int_D \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x} \right) dx dy \quad : \text{Green's Theorem}$$

$\leftarrow R^n$, Ω תכונות נסח, V שדה וקטור.

$$d(i_v \Omega) - \text{תפסית } \Omega$$

$$\operatorname{div}(V) = \nabla \cdot V := \frac{d(\operatorname{iv} \Omega)}{d\Omega} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

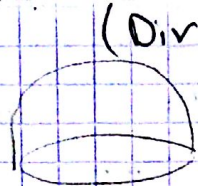
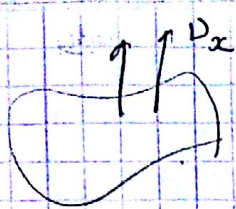
תרבות:

$$V = (V_x, V_y, V_z) \quad \cdot \quad \Omega = dx_1 dy_1 dz$$

$$i_v \Omega = i_v dx \wedge dy \wedge dz - dx \wedge i_v dy \wedge dz + dx \wedge dy \wedge i_v dz =$$

$$= V_x dy dz - V_y dx dz + V_z dx dy$$

$$d(\text{ir } \Omega) = \dots = \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz$$



תרכיב (מחזיק את העצם ה- Div)

$\mathbb{R}^n \subset \mathbb{G}$ יכולה להיות שפה.

ν_x נורמל חיצוני ל- ∂G

(לא תסבך יש אוריינטציה אישית).

$$\theta := \langle \nu_x, \cdot \rangle \omega$$

(כאן האוריינטציה לא תסבך)

תרכיב:

$$\int_{\partial G} \langle \nu_x, V \rangle \theta = \int_G \text{div}(V) \omega$$

מסקנה נוספת - STOKES: M קומפקטית, N קומפקטית (לא צריכה הנחות)

M^n, N^n אוריינטציות (קשירות). $\omega \in \Omega_c^n(N)$. $f: M \rightarrow N$ חלקה.

טענה:

$$\int_M f^* \omega = \deg(f) \int_N \omega$$

משפט הדרגה:

טענה:

ניח $M^n = \partial X^{n+1}$ $F: X \rightarrow N$ מחזיקה את $f: M^n \rightarrow N^n$

$$\int_M f^* \omega = 0 \quad \text{כאשר} \quad \omega \in \Omega^n(N)$$

הוכחה:

$$\int_M f^* \omega = \int_{\partial X} F^* \omega \stackrel{\text{Stokes}}{=} \int_X dF^* \omega = \int_X F^* d\omega = 0$$

מסקנה:

$$\forall \omega \in \Omega^n(N) \quad \int_M f_1^* \omega = \int_M f_2^* \omega \iff f_1, f_2: M \rightarrow N \text{ הומוטופיות}$$

סיבה:

$$0 \stackrel{\text{המש}}{=} \int_{\partial(M \times \{0,1\})} F^* \omega = \int_{M \times \{0\}} F^* \omega - \int_{M \times \{1\}} F^* \omega = \int_M f_1^* \omega - \int_M f_2^* \omega$$

דוגמה:

י דרך: ראוניו של $f: M \rightarrow N$ אנו יש סבור u של y
 כל שלם תכונה $\omega \in \Omega^1(N)$ על תואר u - u מתקיים:

$$\int_M f^* \omega = \deg(f) \int_N \omega$$

(גרסה סוקרטית של המשפט הזוהר)

הוכחה:

משפט גרונדמן התקדמים $\Leftrightarrow f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_n\}$ (M קומפקטית)

(תרגום: ירידה קומפקטיות אחידים אפס זה מספר סופי של נקודות)

$u_i \rightarrow u$ דיפאו $(f_i \text{ צמצום של } f \text{ על } u_i)$

$$\int_M f \omega = \sum_i \int_{u_i} f^* \omega = \sum_i \varepsilon(f_i) \int_{u_i} \omega = \deg(f) \int_N \omega$$

(*)

דוגמה: עברור אוקטד עברפס:

נקח דרך ראוניו y כמו קודם. (זה סבור u)

על $N \ni z$ יש אינפיניטיות חלקה שמתחת את y ו- z

$$h_t^z : N \times [0, 1] \rightarrow N$$

$$h_0^z = Id, \quad h_1^z(y) = z$$

נתבונן ב- $\{h_1^z(u)\}_z$ זה כיסוי פתוח של N . (דבור עתה כיסוי

סופי (קומפקטיות): $h_1(u), \dots, h_k(u)$

נקח חלקות יחידה כיחס כיסוי $f_1, \dots, f_k$

$$\omega = \sum f_k \omega$$

יופרק:

$$\int_M f^* \omega = \sum_i \int_M f^* \omega_i$$

ההעברה:

($f_i^* \omega$)

(שיים על y : f_i הוא סופי f על u_i). כמו בלמה

הקוצות דבור f_i ($\text{supp } \omega_i \subseteq u_i(u)$)

התאמות הקדמות:

$$\int_M f^* \omega_i = \int_M (h; f)^* \omega_i = \deg(h; f) \int_N \omega_i = \deg(f) \int_N \omega_i$$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 מפה בין המרחבים M N N

(סכום ונקודת השלש).

אפשר בעזרת הטענה האחרונה להוכיח למשל את משפט סטיוס-כיונה.

דוגמה:

$$0 \longrightarrow A^* \longrightarrow B^* \longrightarrow C^* \longrightarrow 0$$

סדרה מדויקת קצרה של קו-שרשראות.

אילו לכל $n \in \mathbb{Z}$ קיים connecting homomorphism:

$$\delta: H^n(C^*) \longrightarrow H^{n+1}(A^*)$$

כן יש: הסדרה הסואה מדויקת:

$$\dots \xrightarrow{\delta} H^n(A^*) \xrightarrow{\alpha^n} H^n(B^*) \xrightarrow{\beta^n} H^n(C^*) \xrightarrow{\gamma^n} H^{n+1}(A^*) \xrightarrow{\alpha^{n+1}} \dots$$

הסדרה:

$$\partial_n: C_n \longrightarrow C_{n-1} \quad \text{שרשרת} \quad C_* = \{C_n, \partial_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

$$\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0 \quad C^* = \{C^n, d^n \mid d^n: C^n \rightarrow C^{n+1}\} \quad \text{קו שרשרת}$$

chain map $f: C_* \longrightarrow D_*$ לכאן סדרת הדיוקנות

$$\begin{array}{ccc} C_n & \xrightarrow{\partial_{n-1}} & C_{n-1} \\ f_n \downarrow & & \downarrow f_{n-1} \\ D_n & \longrightarrow & D_{n-1} \end{array} \quad \text{דיוקנות קומוטטיות}$$

הסדרה:

$$g: C^* \longrightarrow D^*, \quad f: C^* \longrightarrow D^* \quad \text{chain-homotopy}$$

קיימת סדרה $S_n: C^n \longrightarrow D^{n-1}$ כך שלקח C^*, D^* מתקיים:

$$d^{n-1} \circ S^n + S^{n+1} \circ C^n = g^n - f^n$$

$$f^n[\omega] - g^n[\omega] = (f^n - g^n)[\omega] = (d^{n-1} \circ S^n + S^{n+1} \circ C^n)[\omega] =$$

$$= d^{n-1} S^n[\omega] + S^{n+1} C^n[\omega]$$