

16/1/2017

חומר הרצאה

הרצאה 23

קבוצת שטחים

$$H_{dR}^*(M)$$

$$H_{dR}^*(\mathbb{R}^n)$$

$$H_{dR}^*(S^1)$$

דיוסאן

היום

אונסקרציה של תכנון דיפרנציאלי

ניתוח

$\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^n$ פתוח, $\omega \in \Omega_c^n(0)$ - תכונות בעלת טמך קופרטי

$$(\omega = f(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n, f \in C_c^\infty(0))$$

קופרטי

$$\int_0 \omega = \int_0 f(x) dx$$

החצא

(ניתן מרחיב את ההצדה $\int_{\mathbb{R}^n} \omega$)

למה ההצדה "טובה"?

טובה

$\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^n$ פתוח, $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ דיפא, $\omega \in \Omega_c^n(0)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} F^* \omega = \int_0 \omega$$

$$E = \begin{cases} 1 & \text{שומר אורנטציה} \\ -1 & \text{אחר} \end{cases}$$

(קורנאמה או שומר אורנטציה)

הוכחה

$$\bar{\omega}_0 = F^* \omega_0, \quad \omega_0 = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

תכונות

תכונות

$$\bar{\omega}_0(\beta_1, \dots, \beta_n) = \omega_0(F_* \beta_1, \dots, F_* \beta_n) = \det(F_*) \omega_0(\beta_1, \dots, \beta_n)$$

$$\omega = f \omega_0 \quad (f \in C_c^\infty(0)) \quad \text{פונקציה בלשח}$$

$$F^* \omega = F^*(f) F^*(\omega_0) = F^*(f) \det(F_*) \omega_0$$

תכונות

$$\varepsilon = \text{sgn}(\det(F_*)) \quad \text{דף הסדרה}$$

(*)
II נשתמש בהשערה כי ההפך מתקיים באינטגרל מרדנא

$$\int_{\Omega} F^* \omega = \int_{\Omega} F^*(f) F^*(\omega) = \int_{\Omega} f \circ F(x) \varepsilon \int_F(x) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \stackrel{(*)}{=} \int_F f(x) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

$$= \varepsilon \int_{\Omega} f(x) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = \varepsilon \int_{\Omega} \omega$$

↑
השערה

בדור יחידה M , נקח $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ כיסוי סופי מרדנא

כך ש $\phi_\alpha: U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$ שהירות אוריינטציה. נקח חלוקת יחידה h_α

$$\int_M \omega = \sum_{\alpha} \int_{\phi_\alpha(U_\alpha)} (\phi_\alpha^{-1})^* h_\alpha \omega$$

טענה:

ההשערה לא תלויה בסתירות שנעשו (אינסוף + חלוקת יחידה)

הוכחה:

$\{(V_\beta, \psi_\beta)\}$ חלוקת יחידה g_β

$$I = \sum_{\alpha} \int_{\phi_\alpha(U_\alpha)} (\phi_\alpha^{-1})^* h_\alpha \omega = \sum_{\alpha} \int_{\phi_\alpha(U_\alpha)} \underbrace{\sum_{\beta} (\phi_\alpha^{-1})^* g_\beta (\phi_\alpha^{-1})^* (h_\alpha \omega)}_{(\phi_\alpha^{-1})^*(1)} =$$

תכונת של אידיאל
מכאן

$$= \sum_{\alpha, \beta} \int_{\underbrace{\phi_\alpha(U_\alpha \cap V_\beta)}_{\omega_{\alpha\beta}}} (\phi_\alpha^{-1})^* (h_\alpha g_\beta \omega)$$

נשים לב ש $T_{\alpha\beta} = \phi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}: \psi_\beta(\omega_{\alpha\beta}) \rightarrow \phi_\alpha(\omega_{\alpha\beta})$

$$T_{\alpha\beta}^* (\phi_\alpha^{-1})^* (g_\beta h_\alpha \omega) = (\psi_\beta^{-1})^* \phi_\alpha^* (\phi_\alpha^{-1})^* (g_\beta h_\alpha \omega)$$

מהטענה הקודמת שהוכחנו

$$I = \sum_{\alpha, \beta} \int_{\psi_\beta(\omega_{\alpha\beta})} (\psi_\beta^{-1})^* (h_\alpha g_\beta \omega)$$

אם $\psi_\beta(\omega_{\alpha\beta})$ אינו ריק, אז (V_β, ψ_β) מכסה את $\omega_{\alpha\beta}$ ונעשה שימוש ב

$$I = \sum_{\alpha, \beta} \int_{\psi_\beta(\omega_{\alpha\beta})} (\psi_\beta^{-1})^* (h_\alpha g_\beta \omega)$$

קבוע

$$\int : \Omega_c^n(M) \longrightarrow \mathbb{R} \quad (1) \quad \text{פ' סימטרי}$$

$$\int_{(M, \sigma)} \omega = - \int_{(M, -\sigma)} \omega \quad (2)$$

$$\omega \in \Omega_c^n(N) \quad \text{זוגיות} \quad f: M^n \longrightarrow N^n \quad (3)$$

$$\int_M f^* \omega = \varepsilon \int_N \omega$$

משפט STOKES

M^n אוריינטציה (ניתן $\partial M \neq \emptyset$) . את ווליום ∂M^n -
 יחסית אוריינטציה $\rightarrow$ מניח $n-1$ - את נקח $\omega \in \Omega_c^{n-1}(M)$

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega \quad \text{נקח}$$

$$\left(\int_{\emptyset} \omega = 0 \quad \text{אם} \quad \partial M = \emptyset \right)$$

מה קורה ב- $\mathbb{R}^n$

$$\int_{\mathbb{R}^n} d\omega = 0 \quad \text{ברוך המסביר מה}$$