

3/1/2017

תורת הרצאות (קצרים)

הרצאה סב:

הצגה של סף של שדה

הצגה:

של S^n יש שדה וקטרי (חלק) של n חלקים n או כוח.

הוכחה:

n או כוח $S^{2k-1} \subset \mathbb{R}^{2k} \cong \mathbb{C}^k$ $x \rightarrow ix$

$(x_1, y_1, \dots, x_k, y_k) \mapsto (-y_1, x_1, \dots, -y_k, x_k)$

$F(t, x) = \cos(\pi t)x + \sin(\pi t)\tilde{V}(x)$ n כוח:

הומוטופיה חלקה בין $f(x) = x$ $g(x) = -x$ ובה לא ייתכן (כאדם הצגה)

פרק י"ג: תכונות דיפרנציאליות

V^n מרחב n (של $\mathbb{R}$)

$\Lambda^k(V^n)$ k - תכונות $\omega: \underbrace{V \times \dots \times V}_k \rightarrow \mathbb{R}$ מולטי-ליניאריות + אנטי סימטריות.

$\Lambda^0(V) \cong \mathbb{R}$ $\Lambda^1(V) \cong V^* = \text{span} \{e^1, \dots, e^n\}$

$\Lambda^m(V) = 0$ $m > n$ הבסיס הדואלי δ

"בסיס" $I = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ בסיס "מסודר" של V

$e^I = e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_k}$ $\leftarrow$ אתחול

wedge

$e^I(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) = \delta_{i_1 j_1} \dots \delta_{i_k j_k}$

הצגה:

$(e^1 \wedge e^2)(v_1, v_2) = v_1 v_2 - v_2 v_1$

$\mathbb{R}^n$

הצגה:

$\dim \Lambda^k(V^n) = \binom{n}{k}$ שהתכנה שלה כסוס, וכן:

wedge product, Exterior product חיצוני

$\omega \wedge \eta \in \Lambda^{k+l}(V) \iff \omega \in \Lambda^k(V), \eta \in \Lambda^l(V)$

$\omega \wedge \eta(v_1, \dots, v_{k+l}) = \sum \text{sgn}(\sigma) \cdot \omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \eta(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)})$

סדרות קטנות

$\sigma = (i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l)$ s.t. $\begin{pmatrix} i_1 < i_2 < \dots < i_k \\ j_1 < j_2 < \dots < j_l \end{pmatrix}$

הערה:

$$\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \quad \text{אסוציאטיביות, כי פאראליליזם}$$

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega \quad \text{אנטי-סופר-קומוטטיוויות}$$

הערה:

$$(איינזקרציה) \quad (u_1 \wedge \dots \wedge u_k)(v_1, \dots, v_k) = \det (u_j(v_i))$$

$$u_j \in V^* \quad v_i \in V$$

Interior product

$$v \in V \quad i_v : \Lambda^k(V) \longrightarrow \Lambda^{k-1}(V)$$

$$i_v(\omega)(v_1, \dots, v_{k-1}) = \omega(v, v_1, \dots, v_{k-1})$$

הערה:

$$i_v(\omega \wedge \eta) = i_v \omega \wedge \eta + (-1)^{\deg \omega} \omega \wedge i_v \eta$$

הערה: (התנהגות סימס סופר-קומוטטיוויות)

$$A : V \longrightarrow W$$

הערה:

$$A^* : \Lambda^k(W) \longrightarrow \Lambda^k(V)$$

$$(A^* \omega)(v_1, \dots, v_k) = \omega(Av_1, \dots, Av_k)$$

$$A^*(\omega \wedge \eta) = A^* \omega \wedge A^* \eta \quad (1)$$

$$i_v A^* \omega = A^*(i_{A(v)} \omega) \quad (2)$$

חברה פרימטור:

$$T_x M = \text{sp} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\}$$

$$T_x^{(n)} M = \text{sp} \{ dx_1, \dots, dx_n \}$$

$$\Lambda^k(M) = \Lambda^k(TM) = \text{אספירטור מסנה חסן}$$

$$= \bigcup_{p \in M} \Lambda^k(T_p M)$$

(T^*M - TM הם שתי מרחבי טנגנטיים) הקובץ

$$\pi: \Lambda^k(M) \rightarrow M$$

$$\pi(p, \omega) = p$$

$$\pi^{-1}(p) = \Lambda^k(T_p M)$$

הקובץ

$f: M \rightarrow N$ פונקציה

$$df_p: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$$

$$df_p^*: \Lambda^k(T_{f(p)} N) \rightarrow \Lambda^k(T_p M)$$

$$df^*: \Lambda^k(N) \rightarrow \Lambda^k(M)$$

$$q \in N, \omega \in \Lambda^k(T_q N), df^*(q, \omega) = df_{f^{-1}(q)}^*(\omega)$$

df^* היא אופרטור דיפרנציאלי "סיב"

($v \in \mathbb{R}^n$) $M = V$ פונקציה

$$T_p M = \text{sp} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \Big|_p \right\}$$

$$T_p^* M = \text{sp} \{ dx_1|_p, \dots, dx_n|_p \}$$

$\omega \in \Lambda^k(T_p M)$ וקטור (קובץ וקטור) $\omega = \sum_{I=(i_1, \dots, i_k)} \omega_I dx^I|_p$

$$\omega = \sum_{I=(i_1, \dots, i_k)} \omega_I dx^I|_p$$

הקובץ

$$V \times \mathbb{R}^{\binom{n}{k}} \rightarrow \Lambda^k(V)$$

המשפט

תהי M יריעה חלקה. $\{ \phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha \}_{\alpha \in A}$ אטלס של M .
 $\chi_\alpha : \phi_\alpha^{-1} : V_\alpha \rightarrow U_\alpha$ קורדינטות מקומיות.

χ_α דיפאיו

מתדיון הקודם $\Leftarrow$

$$\chi_\alpha^* : \Lambda^k(V_\alpha) \cong V_\alpha \times \mathbb{R}^{(n)} \longrightarrow \Lambda^k(U_\alpha)$$

עליו

$\Lambda^k(M)$ מה אטלס עבור $\{ \psi_\alpha = \phi_\alpha^* \}_{\alpha \in A}$

סקיצה (של מה אטלס)

מבדוקים הקורדינטות:

בנקודה $x = (x_1, \dots, x_n)$
 בנקודה $y = (y_1, \dots, y_n)$

$$\psi_{\alpha\beta} = \psi_\beta^{-1} \psi_\alpha$$

$$f = \phi_\beta^{-1} \circ \phi_\alpha : V_{\alpha\beta} \longrightarrow V_{\alpha\beta}$$

$$\psi_{\alpha\beta}(x, \{\omega^I\}) = (f(x), \{\omega'_j\})$$

$\uparrow$

נראה שהשתכנס שמה תלוי ק- x וב- $\{\omega^I\}$ בצורה חלקה.

$$p = \phi_\alpha(x)$$

$$(*) \quad \sum_I \omega_I dx^I \Big|_p = \sum_J \omega'_J dy^J \Big|_p$$

נקבע אינדקס $J = (j_1 < \dots < j_k)$ (כמה) את $(*)$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y_{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_{j_k}} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{RHS} : & \omega'_J \\ \text{LHS} : & \sum_I \omega_I dx^I \Big|_p \left(\frac{\partial}{\partial y_{j_1}} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial y_{j_k}} \Big|_p \right) \end{aligned}$$

נוכח ש:

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \Big|_p = \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial y_j} \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p$$

מציבים ומתבססים:

$$\omega'_J = \sum_I \sum_{\alpha=(\alpha_1, \dots, \alpha_k)} \omega_I \frac{\partial x_{\alpha_1}}{\partial y_{j_1}} \dots \frac{\partial x_{\alpha_k}}{\partial y_{j_k}} dx^I \left(\frac{\partial}{\partial x_{\alpha_1}} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{\alpha_k}} \Big|_p \right)$$

ובזה חתם (השתכנס)

הזכרה:

א תכנית של יחידה M כה חלקי חתך של $\pi: \Lambda^k(M) \rightarrow M$
 חלקה $\omega: M \rightarrow \Lambda^k(M) \leftarrow$ $\pi \circ \omega = Id$ - ש π

צורה (תכנית):

הכנסות הכנסות שקולות:

(1) ω חלקה

(2) ω כנס נכנסות מקומיות

$$\omega|_U = \sum_I \omega_I(x) dx^I$$

הכנסות המקומיות חלקה

טענה:

$f_1, f_2: M \rightarrow \mathbb{R}$ חלקות, $\omega_1, \omega_2 \in \Lambda^k(M)$ פו

$$f_1 \omega_1 + f_2 \omega_2 \in \Lambda^k(M) \quad (1)$$

$$\omega \in \Lambda^k(M) \Rightarrow \omega \wedge \eta \in \Lambda^{k+l}(M) \quad (2)$$

$$F: M \rightarrow N \quad \text{חלקה} \quad (3)$$

$$F^*: \Lambda^k(N) \rightarrow \Lambda^k(M) \quad \text{כנסות, כנסות}$$

$$F^*(g) = g \circ F, \quad g \in \Lambda^0(N) \quad \text{כנסות}$$

$$(G \circ F)^* = F^* \circ G^* \quad ; \quad M \xrightarrow{F} N \xrightarrow{G} P \quad (4)$$

$$f^*(dt) = df \quad \text{חלקה} \quad f: M \rightarrow \mathbb{R} \quad (5)$$

$$F^*(\omega \wedge \eta) = F^*\omega \wedge F^*\eta \quad \text{חלקה} \quad F: M \rightarrow N \quad (6)$$

$$F = (F_1, \dots, F_m): M \rightarrow \mathbb{R}^m \quad \text{חלקה} \quad (7)$$

$$F^*\left(\sum_I \omega_I(y) dy^I\right) = \sum_I (\omega_I \circ F) dF_{i_1} \wedge \dots \wedge dF_{i_k}$$

נושא חשוב: נכנסות חיצוניות

$$d: \Lambda^k(M) \rightarrow \Lambda^{k+1}(M)$$

טענה:

הייתה יחידה חלקה (כנסות) ω ש:

$$f \in C^1(M) \Rightarrow df = d f \quad (1)$$

ה- d חלקה

הכנסות

$$\omega \in \Lambda^k(M), \eta \in \Lambda^l(M) \quad d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta \quad (2)$$

$$\forall \omega \quad d(d\omega) = 0 \quad \text{כנסות} \quad d^2 = 0 \quad (3)$$

ω
 $deg \omega$

הערה:

$$\Lambda^0(M) \cong C^\infty(M)$$

נשים לב ש:

הוכחה:

בהינתן $M = V \subset \mathbb{R}^n$, $\omega = \sum_I \omega_I dx^I$ PK

$$d\omega = \sum_I d\omega_I(x) \wedge dx^I$$

$(x_1, \dots, x_n) \in \varphi: U \xrightarrow{\hat{\mu}} V \xrightarrow{\hat{\nu}} \mathbb{R}^n$ סקורציונות:

$$dx_i \in \Lambda^1(U) \quad (d(dx_i) = 0) \leftarrow (3) - n$$

$$f = \sum f_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

$$df = \sum_{i_1, \dots, i_k} \partial_{i_0} f_{i_1 \dots i_k} dx_{i_0} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

נסתכל על הביטוי הנ"ל
שם f - הישן