

משפט Bu

חלקה א': $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ או כיולית $(f(-x) = -f(x))$ חלקה א'': $\omega_2(f, 0) = 1$

מסקנה א'

f כגוף "כמעט" כל ישר העובר דרך הראשית נחתם בזה אותה.

הוכחה:

אם לא $f(S^n) \cap \mathbb{R}y = \emptyset$ סטיונים אחידים $|f^{-1}(\mathbb{R}y)| = 0$ ולכן סתירה למשפט אחידים. (תרגיל)

מסקנה ב'

$\exists x \in S^n: f_1(x) = \dots = f_n(x) = 0 \iff$ חלקה או כיולית $f_1, \dots, f_n: S^n \rightarrow \mathbb{R}$

הוכחה: נניח שלא קימנו נקודה כזו.

נסדר $F: S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ $F(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x), 1)$ (אם לא)

קימנו נקודה שמאפסת את כל ה- f_i .

והוא לא חותכת את $(\mathbb{R}, \dots, \mathbb{R}, 0)$ סתירה למסקנה א'.

מסקנה ג'

$\exists x: g(x) = g(-x)$ חלקה $g: S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

הוכחה:

(סדור): $f_k(x) = g_k(x) - g_k(-x)$ $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix}$

ונשתמש במסקנה ב'.

מסקנה: משפט ברנרד (האופ)

אם μ מידת בורל סופית על $\mathbb{R}^n$ (המאפיינת כל-המשוררים) $H(r)$ "חצי כדור" (כדור r חוצה את המרחב ל-2 ולוקחים חצי עליון / תחתון של המרחב).

$\mu_k(H(r)) = \frac{1}{2} \mu_k(\mathbb{R}^n) \iff \exists H(r)$

הוכחה

כך ש: $f_k(v) = \mu_k(H(v))$ ונרצה למצוא v $f(v) = f(v)$ (סדור):

פרק י"א : אוריינטציה :

נתון $V = \mathbb{R}^n$ (תחום ב $\mathbb{R}^n$)

הצורה :

שני בסיסים B_1, B_2 של V (תחום) שקולים
המבנה צרמיוני חזק.

הצורה :

אוריינטציה - חלוקה של בסיסים כולם.

הצורה :

$\Lambda^k(V^n)$ הוא פולינום של k תנאים של V
אם $k > n$ אז $\Lambda^k(V^n) = 0$

$V \times V \times \dots \times V \xrightarrow{k} \mathbb{R}$ א תנאים באת העתקה
אנטיסימטרי - ואנטי סימטריות

$$\omega(u_1, \dots, u_i, v_j, \dots, v_n) = -\omega(u_1, \dots, v_j, \dots, u_i, \dots, v_n)$$

תכונות :

$$\dim \Lambda^n(V^n) = 1 \quad (1)$$

$$\forall \omega \in \Lambda^n(V), \forall A \in GL_n(V), \omega(Av_1, \dots, Av_n) = \det(A) \omega(v_1, \dots, v_n) \quad (2)$$

$$\dim \Lambda^k(V^n) = \binom{n}{k} \quad (3)$$

"לחל" : צמצום בסיס

צמצום :

$$\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$$

$$(z_k = x_k + i y_k)$$

$$\sum_{i=1}^n z_i \bar{w}_i = \langle z, w \rangle_{\mathbb{C}} =$$

$$= \langle z, w \rangle_{\mathbb{R}^{2n}} + i \omega(z, w)$$

קודי אוריינטציה של ω
התכונות הסימטריות
הסימטריות

הצגה:

$\omega \in \Lambda^n(V)$ נקראת תבנית נפח אם $\omega \neq 0$ (כאשר מוסיקים לה ω כחסבר)

נסדר יחס שקילות $\sim$ $\frac{\omega_1}{\omega_2} \sim \frac{\omega_2}{\omega_1}$ קין תבניות נפח.

הצגה 2:

אוריינטציה על V היא גזירת שקילות על תבניות נפח.

תכונות:

השתכעו שהתכונה שקולות.

הצגה:

ω מכפלת אות $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ בסיס מסודר, אם $\omega(e_1, \dots, e_n) > 0$.

מכשיון M^n יחידה חסקה

n -תבנית על M^n : כאשר הדרתה חסקה:

$$x \mapsto \omega_x \in \Lambda^n(T_x M)$$

כאשר, לכל מסה: $(x_1, \dots, x_n): U \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\omega_x = f(x) \det, \quad T_x M \cong \mathbb{R}^n, \quad f: U \rightarrow \mathbb{R} \text{ חסקה}$$

הצגה:

יחידה M^n נקראת אוריינטציה אם יש לה תבנית נפח. אוריינטציה - בחירה של גזירת שקילות של תבניות נפח.

דוגמא:

$$S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \quad n \text{ נורמל חיצוני} \quad \det \equiv \omega_0$$

$$\Omega = i_{\eta_x} \omega_0$$

$$\Omega(\{v_1, \dots, v_n\}) = \omega_0(\eta_x, \{v_1, \dots, v_n\})$$

תכונות: כאשר תבנית נפח.

הצגה
בסוף ויד
שאלו שצנין
התוכנית שגשג
האג
החומר

הצבה שקולה:

M אוריינטציה אפ"ש: בחירה חסומה של אוריינטציה על $T_x M$
 (כל נקודה יש אפ"ש באמצע כן ש:)

$$d\varphi_x: T_x M \longrightarrow T_{\varphi(x)} \mathbb{R}^n$$

מתקשרת בין האוריינטציה על $T_x M$ לאוריינטציה הסטנדרטית על $\mathbb{R}^n$

הצבה:

(M, A) אוריינטציה, אפ"ש התקף ההעבר שומר אוריינטציה

הערה:

ח- תכונות אפשר "ע"שון אחורה" (pull back)

$$f^*: \Lambda^n(N) \longrightarrow \Lambda^n(M) \iff f: M \longrightarrow N$$

$$(f^* \omega)(\{v_1, \dots, v_n\}) = \omega_{f(x)}(df v_1, \dots, df v_n)$$

הערה (תרשים):

בשכונת שמשכה לאורך של תכונות נכח תשאר תכונות נכח בן
 ש- f תהיה ציפאק הקומ (למשל מה אפ"ש)

$$X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} Z$$

תרשים:

$$(f \circ g)^* \omega = g^* f^* \omega$$

(1)

(2) $\omega \in \Lambda^n(N)$ אפ"ש: $\phi \in C^0(N)$ (בין מהבואה מהמשכה לאורך של פ)

$$f^*(\phi \omega) = f^*(\phi) f^*(\omega)$$

הצבה:

$f: (M, \omega_M) \longrightarrow (N, \omega_N)$ שומרת אוריינטציה אפ"ש:

$$f^* \omega_N \sim \omega_M$$

תרשים:

$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ אוריינטציה סטנדרטית. שומרת אוריינטציה אפ"ש

$$\det df > 0$$

בשכונת
 (M, ω)
 (N, ω)
 תכונות
 אפ"ש

סלנה:

אם M יחידה עם שפה דא: גרקה - ו - M אורכנס סולאר. אזי M אורכנס

הוכחה: (זכרן הסקירה ריחנית - דא חסוקים)

סלנה:

כל M יחידה יש: הסקירה ריחנית,

(הסקירה ריחנית, כל חלק (section) חלק של $TM \otimes TM$ סימטר + אנסדר חסוקי).

(לכאן סחורה חלקה של גנסה פנימית ככל חרבה חסוקי).

סומונס:

$$g = \sum_i g_{ij}(x) dx_i \otimes dx_j$$

ס' חסוקי

$$g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \delta_{ij}$$

כ - $\mathbb{R}^n$

הוכחה:

$$g = \sum \lambda_i g_i$$

נקח כסוי + חסוקה יחידה

$M \subset M'$ (חסוקה חסוקה של)

סחורה חסוקה (של חסוקה חסוקה):

$$f: M' \rightarrow \mathbb{R}, \quad \partial M = \{f=0\}, \quad M = \{f \leq 0\}$$

נסביר נורמל:

$$\exists \nabla_x f \in T_x M, \text{ s.t.}$$

$$df_x: T_x M \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{נקח}$$

$$df_x(v) = g(\nabla_x f, v)$$

נשום כל ש:

$$df_x(\nabla_x f) = g(\nabla_x f, \nabla_x f) > 0$$

(כסוקה):

$$n_x = \frac{\nabla_x f}{\|\nabla_x f\|_g}$$

$$T_x \partial M = \ker df_x \quad (*) \text{ נכח: } (כח חיה חסוקה)$$

$$\nabla_x f \perp T_x \partial M$$

$$df_x(n_x) > 0$$

$$\omega = \langle n_x, \omega_M \rangle$$

(כסוקה):

זכרן פתחנסכל שכלה חיה שרזוס

הסקנה (תוצאה)

$$\partial(M \times [0,1]) = M \times \{0\} \cup (-M) \times \{1\}$$

הסקנה:

הסקנה: $f: M \rightarrow N$ חלקה, M, N אוריינטציות, M סגור, N קשור.
 $\dim M = \dim N$ ו- y בן הפנים של f .

$$\deg(f, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \epsilon(x)$$

$$\epsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{שומר אוריינטציה} \\ -1 & \text{מפנה} \end{cases}$$

אם יש 2
 יחידה של
 אוריינטציה של
 N של הפנים
 קשורה ו-
 אוריינטציה.