

כרך + דרגה של העתקה (degree)

הערה:

אם קיימת $f, g: M \rightarrow N$ והראו: הומוטופיות בצורה חזקה

פ' חזקה $F: M \times [0, 1] \rightarrow N$ כן ש-

$$\begin{cases} F(x, 0) = f(x) \\ F(x, 1) = g(x) \end{cases}$$

(סמן): $F_t(x) := F(x, t)$

נשים את שמדובר: כיחס שקילות ונסמן $[f]$ את מחלקת העקבות של f .

הערה:

אם f, g כנ"ל חזקות אצל הומוטופיות בצורה חזקה, אזי $\exists$ קורבוס ניתן "לעבור" להומוטופיה חזקה.

הערה:

$f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ הוא הומוטופיה בצורה חזקה לעצמה האפס (f חזקה)

$$F(t, x) = t f(x)$$

תכונות: משפט ברזל התקפים

$f: M \rightarrow N$ חזקה. M קומפקטית (מכשיו ועד סוף ההרצאה)

N קשורה ו- $\dim M = \dim N$ - $y \in N$ שכן תוצאת

$$f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_n\}$$

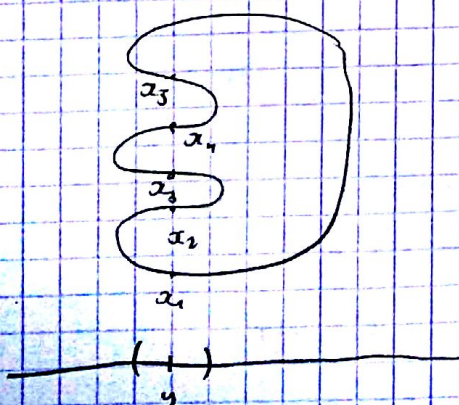
וקיימת סביבה פתוחה U של y כן ש-

$$f^{-1}(U) = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k$$

ו- $f: V_i \rightarrow U$ צפוף

הערה:

המדרג של הקבוצה $f^{-1}(y)$ - $|f^{-1}(y)|$ קבועה ב- U



דרגת מורדל 2:

הסבר:

f של (כעבור יחידות את תנאי גרסא דריות התקפסיות) אולי:

$$\deg_2(f, y) = |f^{-1}(y)| \pmod{2}$$

טענה:

$\dim M = \dim N$ קטור M קומפקטיות, N קטור $f: M \rightarrow N$

הומוטופיות בצורה חסרה $f, g: M \rightarrow N$

1- y בדרך ראויה של f ושל g אולי:

$$\deg_2(f, y) = \deg_2(g, y) \quad (\text{מורדל 2})$$

הוכחה:

תהי $F: M \times [0, 1] \rightarrow N$ הומוטופיה חסרה "קין" f ו- g .

הקרה אולי:

y בדרך ראויה של F .

(נסתכל של $F^{-1}(y)$ ו- RVT (גסה פיריות-ל שפה)

$F^{-1}(y)$ תהי יחידה אחת $\perp$ קומפקטיות-ל שפה:

$$\partial F^{-1}(y) = F^{-1}(y) \cap \partial(M \times [0, 1]) =$$

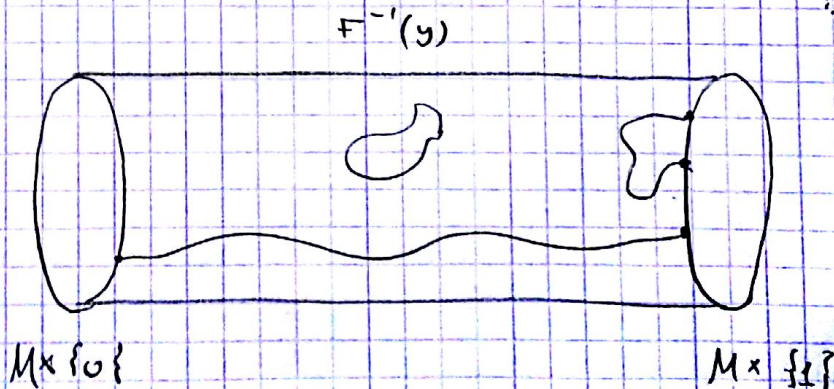
$$= F^{-1}(y) \cap \{M \times \{0\} \cup M \times \{1\}\} =$$

$$= f^{-1}(y) \times \{0\} \cup g^{-1}(y) \times \{1\}$$

(נשים אל ש: אחיו של יחידות חד אחיות (קומפקטיות + שפה)

$$\Leftarrow |F^{-1}(y)| \text{ כולל.}$$

התמונה:



$$\Leftarrow \text{הסכום} \quad |f^{-1}(y)| + |g^{-1}(y)| \text{ כולל} \quad (\text{מורדל 2}) \quad \text{ולכן} \quad \text{הם}$$

שווים (מורדל 2)

מקרה ב')

י אינו זרן באופן של F .

וקה סבירות פתוחות U_f, U_g כך ש- $|f^{-1}(y)|, |g^{-1}(y)|$

קבועים $U_f \cap U_g$.

אנחנו $\text{Sand} \Leftarrow$ קיים זרן באופן של F $\iff \exists \tilde{y} \in U_f \cap U_g$ של F

$$\begin{aligned} \text{even} &= |f^{-1}(\tilde{y})| = |f^{-1}(\tilde{y})| + |g^{-1}(y)| \pmod{2} = \\ &= |f^{-1}(y)| + |g^{-1}(y)| \end{aligned}$$

הוכחה

נניח ש: $f, g: M \rightarrow N$ הן אפיוסיות בזמן חסרה, Pic קיים

$$F: M \times [0, 1] \rightarrow N \quad \begin{cases} F(x, 0) = f(x) \\ F(x, 1) = g(x) \end{cases}$$

1 - F_t קבוע $\forall t \in [0, 1]$.

הוכחה: ("כוחם שווים")

$h: N \rightarrow N$ קיים דיפאדורפיזם h $\iff$ N קטנה וחסרה, $z \in N$

כך ש: $h(y) = z$ (1)

(2) h אפיוסית חסרה Id

(3) $\forall t \in [0, 1] \quad \{x \in N \mid h_t(x) \neq x\}$ חסרה.

הוכחת הטענה

כדי:

נקודת י ונסתכל על z - קיים המק"מ את תמונת המעלה.

כאשר החסרה שקיימת. (ראה שכלת קבוצה פתוחה).

ואפשרות (וקד) $\Leftarrow$ יש רק אחת כלבת ("הכל" N)

ולה מסיום את הטענה.

הוכחה:

בדוקציה (א) בחירת גבורה $N = \mathbb{R}^n$ -1 $y = 0$ (זהשתכל)

בחר בסיס $z = (z_1, 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$

(לומר בחר גורם כן ש- y הוא הראשית ו- z נפרדת על ציר ה- x)

בחר $f_n \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R})$ כ- $f_n(0) = 1$ ו- $f_n(x) = 0$ עבור $\|x\| \geq \varepsilon$

גדיר $h_t: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow N = \mathbb{R}^n$

$$(a, b) \mapsto (a + t f_{n-1}(b) f_1(a) z_1, b)$$

נשים לב ש- $h_0 = 1$, $h_1(y) = h_1(0) = z$

$h_t(x) = x$ $\|x\| \geq \varepsilon$

נשתכל שגורם בדפאור $t \in [0, 1]$

נקח את הקואפוננטה הראשונה:

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g(a) = a + t f_{n-1}(b) f_1(a) z_1$$

$$g'(a) = 1 + t f_{n-1}(b) f_1'(a) z_1$$

דפאור z מספיק קטן $\forall t \in [0, 1]$ $g'(a) > 0$

שתכל על:

$$dh_t|_{(a,b)} = \begin{pmatrix} 1 + t f_{n-1}(b) f_1'(a) z_1 & (x) \\ 0 & Id \end{pmatrix}$$

דפאור, גורם דפאור והפוכה נקרא גורם

מסקנה:

M קואפוננט (כדי שיהיה) $\dim M = \dim N$ קשורה

גורם ראשית

$\deg(f, y)$ דפאור דפאור y דפאור דפאור

שם הדיסטריביון חלקות

הוכחה:

נקח h_t דפאור הקודמת $h_1(y) = z \iff z$ דפאור ראשית

שם $h_1 \circ f$ דפאור

$$|f'| (y) | = | (h_1 \circ f)^{-1} (z) | = | f' (z) | \pmod{2}$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 $y = h_1^{-1}(z)$ מכונה קודמת קודמת

הבט $\deg_2(f)$

אומר ש- f יש דרגה זוגית (אזי פשוט) אם $\deg_2 f = 0 \pmod{2}$ (אחרת).

תוצאה:

ההעתקת הזהות - Id יש דרגה אי זוגית $(Id: M \rightarrow M)$

תוצאה:

ההעתקת הקבוצה $f: M \rightarrow M$ $f(M) = \emptyset$ יש דרגה זוגית.

הסקה:

ההעתקת הזהות וההעתקת הקבוצה לא הומוטופיות בצורה חלקה.

הסקה:

לא קיימת $F: D^{n+1} \rightarrow S^n$ חלקה כן יש $F|_{S^n} = Id$

כי אם הייתה קיימת ההעתקה כזו נבדוק אותה על S^n .

חלקה $\rightarrow$

$$\begin{aligned} \phi(t, x) &= F(t, x) : S^n \times [0, 1] \rightarrow S^n \\ \left\{ \begin{aligned} \phi(0, x) &= F(0) = \text{const} \\ \phi(1, x) &= F(x)|_{S^n} = Id \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

תוצאה:

קומוטטיב, השיר, חלק האותו המיוצר, אולי:

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

$$\deg_2(g \circ f) = \deg_2(f) \cdot \deg_2(g)$$

תוצאה: (לשיט כיתרה ??)

אם קיים שדה וקטורי חלק ולא מתאפס על S^n אזי קיימת הומוטופיה חלקה בין ההעתקת הזהות ל- $\phi(x) = -x$

הערה:

אם n אי זוגי אזי $\phi(x) = -x \sim Id$

כאן: $\mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n$ והעתקת כפל ב- i

הגדרה:

מספר פיתול מודולו 2 (winding number)

חלקה $f: N \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, $\dim N = n$, קומפקטיות N
 $y \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus f(N)$

$$\omega_2(f, y) := \deg_2(v)$$

$$v: N \rightarrow S^n$$

$$v(x) = \frac{f(x) - y}{\|f(x) - y\|}$$

הגדרה:

מרכיבות $N = S^1$ אם $\omega_2(f, y)$ כה מספר הפיתול "הסגור" של חלקה סגורה $f(N)$ סביב y . (מודולו 2)

משפט:

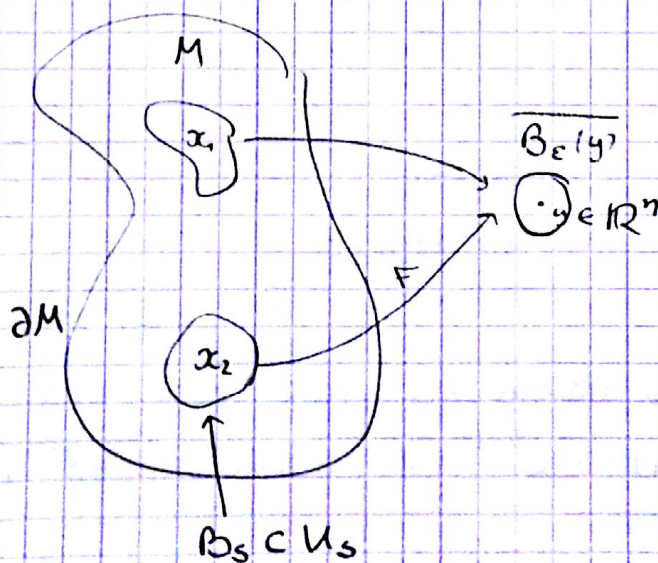
M קומפקטיות חלקה , שפה לא ריקה $\partial M \neq \emptyset$, $\dim M = n$. חלקה $f: \partial M \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$F|_{\partial M} = f \quad \text{חלקה כן } F: M \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ ש-}$$

אם $y \notin f(\partial M)$ חלק ראשית של F אזי $F^{-1}(y)$

קבוצה סופית ומתחייב:

$$\omega_2(f, y) = |F^{-1}(y)| \pmod{2}$$



הסבור של התמונה והפוכה F^{-1}

של $B_\epsilon(y)$

הוכחה:

מקרה א:

$$y \notin F(M) \quad (\text{טן } y \text{ הוא ברג רגורג לפי הסדרה})$$

$$V|_{\partial M} = v \quad -1 \quad V(x) = \frac{F(x) - y}{\|F(x) - y\|} \quad \text{טגור}$$

(הוסבר הטכ)

$$V \text{ פס } v \text{ פס } z \in S^{n-1} \quad \Leftarrow \text{SARD} \quad \Leftarrow \text{קיים ברג רגורג}$$

$$V^{-1}(z) \quad \Leftarrow \text{יתרה קורפקטיות} \quad (\text{א - RVT - הירסה פס פסה})$$

$$\partial V^{-1}(z) = \partial M \cap V^{-1}(z) = v^{-1}(z) \quad 1 \quad \text{המחזר}$$

המיון פס ירגור קורפקטיות:

$$\omega_z(f, y) = \deg_z(v) = 0 = |F^{-1}(y)|$$

מקרה ב:

$$F^{-1}(y) \neq \emptyset \quad (y \notin f(\partial M) - \text{נכור})$$

המשפט ברמה התקליטיוס:

$$M \supseteq F^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_n\}$$

ויס סגורות פתוח - u פס x - $\tilde{u}$ פתוח פס y p ש -

$$F|_{u_i}: u_i \rightarrow \tilde{u} \quad \text{דיפאוי}$$

נקח $\tilde{u} \supset \overline{B_\varepsilon(y)}$ (טגור):

$$B_j := F^{-1}(\overline{B_\varepsilon(y)}) \cap u_j \subseteq u_j$$

$$\tilde{M} = M \setminus \bigcup_{j=1}^n \text{int}(B_j) \quad \text{טגור}$$

$$\tilde{F} = F|_{\tilde{M}}, \quad \tilde{V} = V|_{\tilde{M}}, \quad \tilde{v} = V|_{\partial \tilde{M}}$$

נשים פס $y \notin \tilde{F}(\tilde{M})$ ואנחנו חכרה במקרה המאשן.

$$\tilde{V} \quad \Leftarrow \text{ברמה פוסית}$$

$$\tilde{V}^{-1}(z) = v^{-1}(z) \cup v_1^{-1}(z) \cup \dots \cup v_n^{-1}(z)$$

$$v_s: \partial B_s \rightarrow S^{n-1}$$

$$v_s(x) = \frac{F(x) - y}{\|F(x) - y\|} = \frac{F(x) - y}{\varepsilon}$$

$$0 = \deg_z(\tilde{V}) = \deg_z(v) + \sum_{s=1}^n \deg_z(\tilde{V}_s) \pmod{2}$$

$$\deg_z(v) = \sum_{s=1}^n \deg_z(\tilde{V}_s)$$

קורפסנו:

טגור

$$\deg_2 V_3 = 1 \iff \theta_5 \text{ der minimal} \iff$$

$$\deg_2(V) = N(\bmod 2) = |F^{-1}(y)| \bmod (2) \iff$$

■