

19/12/2016

הרצאה 15

$\Gamma(TM)$, $\mathcal{X}(M)$

תכונות: שדות וקטורים

$[X:Y]$

החסר, $C^\infty(M)$

הא, הודף

$(\phi^*X)(f) = f \circ \phi$, $\phi: M \rightarrow N$, "pull back"
push forward

השדה

"השדה"

אם $\phi: M \rightarrow N$ זוגי יש קשר בין השדה והשדה

$$(\phi_*X)(p) = d\phi_{\phi^{-1}(p)} X_{\phi^{-1}(p)}$$

נוסחת טיילור:

$$\left(\begin{array}{l} \frac{d}{dt} \phi_x^t = X \circ \phi_x^t \\ \phi_x^0 = Id \end{array} \right)$$

נוסחת טיילור:

$$f(\phi_x^t) = f + tX(f) + \frac{t^2}{2}X(X(f)) + \dots + o(t^{k+1})$$

מהו שדות וקטורים? (מהו השדה והשדה?)

(1) קשר

(2) האפשרות לזרם

$$L_X f = Xf = \frac{d}{dt} \bigg|_{t=0} (\phi_t^X)^* f$$

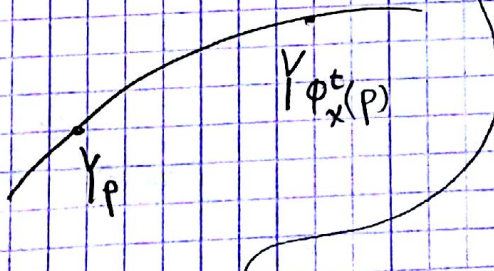
$$f(x+h) = f(x) + h \cdot \text{flow}$$

השדה הוא השדה

השדה הוא השדה

השדה הוא השדה

השדה הוא השדה



השדה הוא השדה push forward

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{d\phi_x^{-t} Y_{\phi_x^t(p)} - Y(p)}{t} =$$

זהו זה שנקרא
משפט הווקטור
בנקודה p

$$= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\phi_x^{-t})_* Y_{\phi_x^t(p)}$$

$$\begin{aligned} \phi_x^{-t} : M &\longrightarrow M \\ \phi_x^t(p) &\longrightarrow p \\ d\phi_x^{-t} : T_{\phi_x^t(p)} &\longrightarrow T_p M \end{aligned}$$

הוכחה

$$\mathcal{L}_X Y = [X, Y] = X(Y(f)) - Y(X(f))$$

כאן נשתמש במשפט הווקטור

הוכחה

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{d\phi_x^{-t} Y_{\phi_x^t(p)} - Y(p)}{t} = - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [Y_p(f) - (\phi_x^{-t})_* Y_{\phi_x^t(p)}(f)] =$$

זהו זה שנקרא
משפט הווקטור
בנקודה p

$$= - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [Y_p(f) - Y_{\phi_x^t(p)}(f \circ \phi_x^{-t})] =$$

$$= - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [Y_p(f) - Y_{\phi_x^t(p)}(f - tX(f) + o(t^2))] =$$

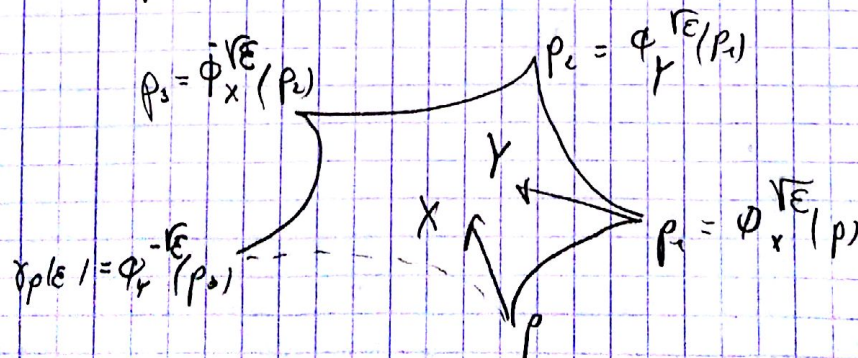
$$= - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{Y_p(f) - Y_{\phi_x^t(p)}(f) + Y_p(X(f))}{t} = - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(Xf) \circ \phi_x^t(p) - Y_p(f)}{t} + Y_p(X(f))$$

$$= X(Y(f)) - Y(X(f))$$

הוכחה (נשתמש במשפט הווקטור $\mathcal{L}_X Y$)

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \gamma_p(\varepsilon) = \mathcal{L}_X Y_p$$

$$\gamma_p(\varepsilon) = \phi_Y^{-\varepsilon} \circ \phi_X^{-\varepsilon} \circ \phi_Y^{\varepsilon} \circ \phi_X^{\varepsilon}$$



זהו זה שנקרא
משפט הווקטור
בנקודה p

הוכחה

(השענה מקומית) נקבע, נחשב קורדינטות - סביב p :

$$(u, x^1, \dots, x^n)$$

$$X = \sum^1 X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad Y = \sum^1 Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

$$[X, Y](x^i) = X(Y^i) - Y(X^i)$$

פונקציות קואורדינטות

(בפונקציות אחרות סיימור כל מה שקורדינטות)

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{aligned} X^i(p_2) &= X^i(p) + \sqrt{\epsilon} X^i(p) + \frac{1}{2} \epsilon X^2(x^i)(p) + o(\epsilon^{3/2}) \\ X^i(p_2) &= X^i(p) + \sqrt{\epsilon} Y^i(p) + \frac{1}{2} \epsilon Y^2(x^i)(p) + o(\epsilon^{3/2}) \end{aligned} \right. \quad \text{נוסחת סיימור} \\ \rightarrow = X^i(p) + \sqrt{\epsilon} X^i(p) + \frac{1}{2} \epsilon X^2(x^i)(p) + \sqrt{\epsilon} Y^i(p) + \frac{1}{2} \epsilon Y^2(x^i)(p) + o(\epsilon^{3/2}) \end{aligned}$$

שיק מנוסחת סיימור:

$$Y^i(p_1) = Y^i(\phi_x^{\sqrt{\epsilon}}(p)) = Y^i(p) + \sqrt{\epsilon} X(Y^i)(p) + o(\epsilon)$$

$$Y^2(x^i)(p_1) = Y^2(x^i)(\phi_x^{\sqrt{\epsilon}}(p)) = Y^2(x^i)(p) + \sqrt{\epsilon} Y^2(x^i)(p) + o(\epsilon) \quad \text{באופן דומה:}$$

הקדמות:

$$X^i(p_2) = X^i(p) + \sqrt{\epsilon} (Y^i(p) + X^i(p)) + \epsilon \left(\frac{1}{2} Y^2(x^i)(p) + X Y^i(p) + \frac{1}{2} X^2(x^i)(p) \right) + o(\epsilon^{3/2})$$

כל מה שאחר (בסוף)

$$X^i(\phi_p(\epsilon)) = X^i(p) + \epsilon [X(Y^i)(p) - Y(X^i)(p)] + o(\epsilon^{3/2})$$