

13/12/2016

הרצאה 14

פרק 5 - שדות וקטורים

$$\pi \circ X = Id \quad \& \quad \text{תנאי} \quad X: M \rightarrow TM$$

$$(*) \quad X(fg) = fX(g) + gX(f) \quad , \quad X: C^1(M) \rightarrow C^1(M)$$

דיפרנציאליות

$$\varphi = (x_1, \dots, x_n): U \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{קורדינאטות מקומיות}$$

$$X(\omega) = \sum f_i(\alpha) \frac{\partial}{\partial x_i} \equiv \sum \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

"וֶטֶר" (vector field)

"Lie derivative"

$$L_X f = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (f \circ c)$$

סימון:  $\exists (M)$  או  $\Gamma(TM)$  - אספיק של השדות הוקטוריים על  $M$

$$f \cdot X = f(\alpha) X(\alpha) \quad : \quad C^\infty(M) \quad \text{כאן } \alpha \text{ הוא נקודה ב- } \mathbb{R} \text{ , מודול מודל}$$

על אספיקה ביוסם עכשית התחבבה

$$(**) \quad f'' = X(Y(f)) \quad Y = X = \frac{\partial}{\partial x} \quad , \quad \mathbb{R} \quad \text{(דברואה , } \mathbb{R} \text{)}$$

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)) \quad \text{ראויט שמה שדה וקטורי}$$

הערה (תרשים)

המשוואות "מחזקות"

$$Y = \sum b_j \frac{\partial}{\partial x_j} \quad , \quad X = \sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$[X, Y](f) = \dots = \sum_{k,l=1}^n \left( a_k \frac{\partial b_l}{\partial x_k} - b_k \frac{\partial a_l}{\partial x_k} \right) \frac{\partial}{\partial x_l} f$$

תרשים

$$([X, Y]) \quad \text{הערה} \quad \text{בי לינאריות} \quad \text{אוסף סימטריות}$$

$$(C^\infty(M)) \quad \text{על בי לינאריות מודל}$$

תרשים

$$[X, hY] = X(h)Y + h[X, Y]$$

$$X, Y, Z \in \Gamma(TM) \quad \text{על (אספיק) מקומית מודל} \quad \text{והקובץ}$$

$$[X, [Y, Z]] = [[X, Y], Z] + [Y, [X, Z]] \quad \text{(תרשים)}$$

הערה:

אלסטרס די (Lie) זה חתום וקטורי (R-Mod) המצויז בהתנה  
 סו ליטוריות  $[ \cdot, \cdot ] : V \times V \longrightarrow V$  (Lie bracket)  
 די ליטוריות, אנוני סולטור, מקיימת פתח יחידה.

הסבר ליטוריות כחולס (סכרת):

נקבז  $X \in \Gamma^1(TM)$   $L_X : \Gamma^1(TM) \longrightarrow \Gamma^1(TM)$

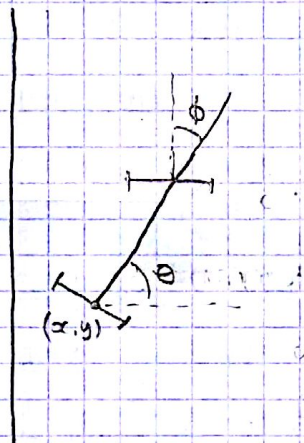
$L_X(Y) = [X, Y]$

פחות ולקובי  $\Leftarrow$

$L_X([Y, Z]) = [L_X(Y), Z] + [Y, L_X(Z)]$

וכאז תכונת צרוקצוק

סכרת (תכונת): (סכרת די וחטיה כחולס)



drive =  $\cos \phi (\cos \theta \partial_x + \sin \theta \partial_y) + \sin \phi \partial_\theta$

steer =  $\partial \phi$   
(סנה)

skid =  $-\sin \phi (\cos \theta \partial_x + \sin \theta \partial_y) + \cos \phi \partial_\theta$   
(החלק)

parallel =  $-\sin \theta \partial_x + \cos \theta \partial_y$   
(החלק)

אלסטרס קרדייז

← להשתכח שחשנות חחוליס

← לחסר את כל הקורנטיות האפשריים

$\Gamma(TM)$  אלסטרס  $\delta$

$F : M \longrightarrow N$  PIC

$v \in T_p M$ ,  $p \in M$  . push forward  $\delta$  (סיון)

$\omega = d_p F(v) \in T_{F(p)} N$

$\Leftarrow$

$q = F(p)$   $Y(q) = d_{F(p)}(X(p))$

... זהו חסר חסר  $F$  חסר חסר

(שום חסר חסר  $F$  חסר חסר, חסר חסר). (חסר חסר חסר חסר)

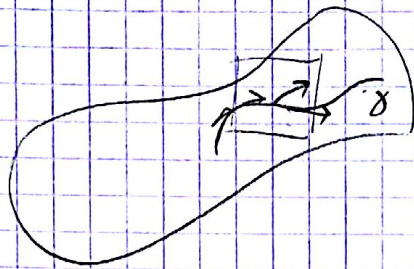
$F_* X \in \Gamma(TN)$

$F_* X(q) = d_{F^{-1}(q)} X_{F^{-1}(q)}$

# שדות וקטורים וכרומה:

## הקדמה:

בהינתן שדה וקטורי  $X$  . לקוחה  $\gamma: I \rightarrow M$  (קוואר) לקוחה אינטגרלית של השדה  $X$  אם  $\dot{\gamma}(t) = X_{\gamma(t)}$



## בקורדינטות מקומיות:

$(u, (x_1, \dots, x_n))$

$$\gamma^i(t) = x_i(\gamma(t))$$

$$\dot{\gamma}(t) = \frac{d\gamma}{dt}(t) = \sum \frac{d\gamma^i}{dt} \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$\frac{\partial \gamma^i}{\partial t} = X^i(\gamma^1(t), \dots, \gamma^n(t))$$

הקבוצה  $I$  מכונה

## המשפט היסודי:

בהינתן תנאי התחלה יחידים:  $p \in M$

אם  $X$  ופסל נקודה  $p \in M$  קיימת ויחידה לקוחה אינטגרלית

בת הנקודה  $p \in M$

$$\dot{c}_p(t) = X_{c_p(t)}, \quad c_p(0) = p, \quad c_p(t): I \rightarrow M$$

"חלקות כוחם שטחית התחלה"

## הגדרה (flow):

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta: \mathbb{R} \times M \rightarrow M \\ \theta(0, p) = p, (Id) \\ \theta(t+s, p) = \theta(t, \theta(s, p)) \end{array} \right. \rightarrow \text{חלקה כוח (בהחלטה חלקה בין יחידות חלקות)}$$

שדה וקטורי  $\Leftarrow$  כרימה (הקואסי-טנגנט)  $\mathbb{R}$  אחרת באופייהו אינטרוול).

סימון סטנדרטי:

$$\phi_x^t(p) = C_p(t)$$

$$\left| \frac{d}{dt} \phi_x^t(p) = X \circ \phi_x^t \right| \leftarrow \text{הקשר בין שדה וקטורי וכרימה}$$

$$\phi_x^{t+s} = \phi_x^t \circ \phi_x^s$$

$$\frac{d}{dt} \phi_x^t = X \circ \phi_x^t \quad \text{קשר בין שדה וקטורי לכרימה:}$$

שדה וקטורי נקרא שדה אם לכל נקודה יש סקודה אינסגרוואית ברכה (כל שדה וקטורי קואסי-טנגנטי הוא שדה).

האם אפשר "לבחור קרימה" שדה וקטורי?

התשובה:

$$Y \in \Gamma(TM), \quad X \in \Gamma(TM) \quad \text{חסקה} \quad f: M^m \rightarrow N^n$$

(f-related)  $\underbrace{X, Y}_{\text{קשורים}} \text{ הם } f\text{-related}$

$$df(X(p)) = Y(f(p)) \quad \forall p \in M \quad \text{אם:}$$

$$(df(X) = Y \circ f)$$

לערה:

$$(*) \quad \overbrace{f \circ \phi_x^t = \phi_y^t \circ f}^{(*)} \quad X, Y \text{ הם קשורים אס'ם:} \quad \text{אס'ם קשורים}$$

הוכחה:

כלל שרשרת

נוח (\*).

$$df(X) = df \left( \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\phi_x^t) \right) \stackrel{(*)}{=} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (f \circ \phi_x^t) \stackrel{(*)}{=} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\phi_y^t \circ f) =$$

$$= Y \circ \phi_y^0 f = Y \circ f$$

כחול : השני

$$df(x) = Y \circ f \quad \text{נניח}$$

$$\frac{d}{dt}(f \circ \phi_x^t) = df \left( \frac{d}{dt} \phi_x^t \right) = df(X \circ \phi_x^t) = Y \circ f \circ \phi_x^t = \frac{d}{dt}(\phi_y^t \circ f)$$

$$\begin{cases} t \rightarrow f \circ \phi_x^t \\ t \rightarrow \phi_y^t \circ f \end{cases} \quad \text{לכל } t \text{ קטן מספיק}$$

לכן  $t=0$   $UN^0$

תזכורת :

$$\phi^* : C^0(N) \rightarrow C^0(M) \quad \phi : M \rightarrow N \quad \text{PIC}$$

$$f \mapsto \phi^* f = f \circ \phi$$

$$(\phi_*(X))(q) = (d\phi_{\phi^{-1}(q)})(X_{\phi^{-1}(q)}) \quad \text{וזהו } \phi \text{ מביא את } X \text{ לנקודה } q$$

$$L_X : \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM) \quad \text{Lie derivative} \quad \text{הקטור } L_X \text{ מביא את } X \text{ לנקודה } q$$

עכשיו :

$$f \in C^\infty(M) \quad (scalar) \quad X \in \Gamma(TM) \quad (1)$$

$$Xf = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi_t^* f$$

flow of X

(? flow of X  $\phi_t$  de pull back  $\rightarrow$  זהו  $\phi_t$ )

(המשפט)

$$[X, Y] := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\phi_{-t}^X)_* Y_{\phi_t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{Y - (\phi_{-t}^X)_* Y_{\phi_t}}{t} \quad (2)$$

$$L_X Y(p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} d(\phi_{-t}^X) \Big|_{\phi_t^X(p)} \cdot Y(\phi_t^X(p)) =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d(\phi_{-t}^X)_{\phi_t^X(p)} \cdot Y_{\phi_t^X(p)} - Y_p}{t}$$

הכנה: נוסחאות טיילור

$f \in C^\infty(M)$  -  $M$  מנחה וקטורית  $X$

$$f \circ \phi_x^t = f + tX(f) + \frac{t^2}{2!}X^2(f) + \dots + o(t^{k+1})$$

$$X^2(f) = X(X(f))$$

הכנה

הוכחה:

$(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}) \quad t \rightarrow f(\phi_x^t(p))$  נשתמש במשפט טיילור לפונקציה  
מסוגל

$$\frac{d^k}{dt^k} f(\phi_x^t(p)) \Big|_{t=0} = X^k(f)(p)$$

עבור  $k=0$  - ברור

עבור  $k=1$

כל הנגזרות

$$\frac{d}{dt} f(\phi_x^t(p)) = \frac{d}{dt} f \circ \phi_x^t(p) = X_{\phi_x^t(p)}(f) = X(f) \cdot (\phi_x^t(p))$$

המשפט הוכחה באמצעות (הכנה)

$$\phi_x^t = \exp(tX)$$

המשפט הוכחה

הוכחה:

ידי  $X, Y \in \Gamma(TM)$

$$[X, Y]_p = \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0^+} \delta_p(\varepsilon)$$

$$\delta_p(\varepsilon) = \phi_Y^{-\sqrt{\varepsilon}} \circ \phi_X^{-\sqrt{\varepsilon}} \circ \phi_Y^{\sqrt{\varepsilon}} \circ \phi_X^{\sqrt{\varepsilon}}$$

