

תכונות:

* אלכסיון והלואה, תמונה ניוטון $f: M^m \rightarrow N^n$ חלקה, יחידות קטירות

העברה:

$N \in \mathbb{R}^n$ נקראת שברן באופן אם $D_x f$ על $f^{-1}(y)$ $y \in N$ (אחרת y שברן קריטי, נקודה קריטית).

משפט:

אם y שברן באופן, אם $f^{-1}(y)$ יחידה חלקה, ו-

$$\dim f^{-1}(y) = \dim(M) - \dim(N)$$

דוגמה:

$Y \subseteq \mathbb{R}^l, X \subseteq \mathbb{R}^k, k \geq l$ סקטור פתוח של המישור
 $\pi: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^l$ המראה על הקורדינטות הראשונות
 $f: X \rightarrow Y$ חלקה, $f(0) = 0$, $D_0 f$ על
 אולי יש סקטור $0 \subset X$ פתוח של המישור וזכור
 $F: 0 \rightarrow F(0) \subseteq \mathbb{R}^k$ כך ש- $F(0) = 0$, פתוח $F(0)$
 $f \circ F^{-1} = \pi$

המראה על הקורדינטות הראשונות
 $\pi: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^l$
 $f: X \rightarrow Y$
 $F: 0 \rightarrow F(0) \subseteq \mathbb{R}^k$

סקיצה:

$D_0 f$ אחר שיתן קורדינטות:

$$D_0 f = (Id_{l \times l} \mid 0_{l \times (k-l)})$$

המראה על הקורדינטות הראשונות

סקיצה:

$F(x_1, \dots, x_k) = (f(x_1, \dots, x_k), x_{l+1}, \dots, x_k)$

$f = \pi \circ F$ נשים לב:

ואם e_i, f בסיס סטנדרטי

$D_x F(e_i) = D_0 f(e_i) = e_i \quad 1 \leq i \leq l$

$D_x F(e_i) = D_0 f(e_i) + D_0 Id(e_i) = e_i$

$D_x F$ איננו, וזכור $\leftarrow$

המשפט: $\left. \begin{array}{l} \text{התבונן ב} \\ \text{המשפט} \end{array} \right\} \cdot (p \in f^{-1}(y))$ p נקודה (u, ϕ)
 $f(p)$ נקודה (v, ψ)

$$D_{\phi(p)}(\psi \circ f \circ \phi^{-1}) \iff D_p f$$

$$(y = f(p)) \quad \psi(y) = 0 \quad , \quad \phi(p) = 0 \quad \text{בה} \quad \psi$$

$O_{\phi(p)} \subset \phi(U)$ תהיה תמונה $\iff$ תהיה תמונה

$$f_{\phi, p, \psi} : O_{\phi(p)} \rightarrow F_{\phi, p, \psi}(O_{\phi(p)})$$

↑
תמונה

$$F(\phi(p)) = F(0) = 0$$

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} \circ F_{\phi, p, \psi}^{-1} = \pi$$

עבור

$$\Omega_{p, \phi, \psi} = F_{p, \phi, \psi}(O_{\phi(p)}) \cap \ker \pi$$

$$\ker \pi = \mathbb{R}^{\dim(M) - \dim(N)}$$

בתורה Ω

(1) Ω

$$0 \in \Omega_{p, \psi, \phi}$$

(2)

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} \circ F_{p, \phi, \psi}^{-1}(\Omega_{p, \psi, \phi}) = \pi(\Omega_{p, \psi, \phi}) = 0 = \psi(y)$$

(3)

$$U_{p, \phi, \psi} = \phi^{-1} \circ F_{p, \phi, \psi}^{-1}(\Omega_{p, \phi, \psi}) \subset M$$

(נד)

$$p \in U_{p, \phi, \psi}$$

$$f(U_{p, \phi, \psi}) = \psi^{-1} \circ \psi \circ f(U_{p, \psi, \phi}) = \psi^{-1}(\psi(y)) = y$$

$$U_{p, \phi, \psi} \subset f^{-1}(y)$$

כבר

עבור

$$f(y) \text{ תהיה תמונה } \phi_{y, y} \text{ (} U_{\phi, p, \psi}, F_{\psi, p, \phi} \circ \phi \text{)}$$

(זהו סדר שהתבונן האם זה כיוון)

האם תמונה?

$$(F_{\tilde{p}, \tilde{\phi}, \tilde{\psi}} \circ \tilde{\phi}) \circ (F_{p, \psi, \phi} \circ \phi)^{-1} =$$

$$= F_{\tilde{p}, \tilde{\phi}, \tilde{\psi}} \circ (\tilde{\phi} \circ \phi^{-1}) \circ (F_{p, \psi, \phi})^{-1}$$

וכך תוכלו להוכיח

$$\Psi(x, y) = y^2 - x^2, \quad \Psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

האקוואציה: $\pm(2x, 2y)$ פתרונות 0-0. $(x = \pm y)$ איננו פתרון של המשוואה.

המשפט: הרגולריות הקבועה:

המשפט: $f: M^m \rightarrow N^n$ חלקה, $\text{rank}(f) = k$ בכל הנקודות.

אזי לכל $p \in M$ יש $f(p) \in N$ ויש גורם סקלר:

$$\Psi \circ f \circ \Phi^{-1}(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$$

הוכחה: (סקלר)

שלם 0 - מספר המכתיב את הסטת $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ (הזדהות).

המשפט:

אחרי סיבוב אחד של אינברסיה.

$$\det \left(\frac{\partial f^j}{\partial x_i} \right) \Big|_{i,j=1}^k (0) \neq 0$$

$$\tilde{\Phi}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$$

II $\Leftarrow$

$$(x_1, \dots, x_m) \mapsto (f^1(x), \dots, f^k(x), x^{k+1}, \dots, x^m)$$

דיופאן: גססיה של המשוואה.

(הוכח):

$$f \circ \tilde{\Phi}^{-1}(x^1, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^k, f^{k+1} \circ \Phi^{-1}(x), \dots, f^n \circ \Phi^{-1}(x))$$

אם q נקודה כלשהי בתחום של $f \circ \tilde{\Phi}^{-1}$ המהירות של המפה:

$$\left(\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline * & \frac{\partial (f^j \circ \Phi^{-1})}{\partial x_i} \end{array} \right) \quad i, j > k$$

אם $k > n$, איננו שומרים על f הט k

$$\frac{\partial (f^j \circ \Phi^{-1})}{\partial x_i} (q) = 0$$

המשפט: אם $k > n$ אזי ההרכבה $f \circ \tilde{\Phi}^{-1}$ אינה

תמיד קורדינטה x עבור $i > k$

$$f^j \circ \Phi^{-1}(x) = f^j \circ \tilde{\Phi}^{-1}(x^1, \dots, x^k) \quad \text{if } j > k$$

$$\psi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \quad (13.7)$$

$$\psi(y_1, \dots, y_n) = (y^1, \dots, y^k, y^{k+1} - f^{k+1} \circ \Phi^{-1}(y), \dots, y^n - f^n \circ \Phi^{-1}(y))$$

הולקדמון שלם כראשית?

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ * & I \end{pmatrix}$$

צבאי מקומי

$$\psi \circ f \circ \Phi^{-1}(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$$

■

מה ראינו בצד השני?

(1) אינרסיה הקווית הוא כמו שיכון

(2) סדרה הקווית הוא כמו הסדר

(3) (4) $f'(y)$ (סמנים הקדמים) תת יחידה משכנת מרחב $m-n$

$$T_p f^{-1}(y) = ?$$

תמיד מסודרת הישגית?

(כמו, האם יש דרך טובה שיתאר את המרחב המשיק לפרדה הזו?)

9 לכל נקודה קיימת סביבה $f^{-1}(U) \subset M$ כך ש-

$f|_U$ סדרה

המשפט הבא: אם $p \in f^{-1}(q)$ יש קורדינטות

$(U, x^1, \dots, x^m)$ near p

$(V, y^1, \dots, y^n)$ near q

$$f^{-1}(q) \cap U = \{ p \in U \mid x^1(p) = \dots = x^m(p) = 0 \} \quad \text{כך ש-}$$

ובאמת המרחב המשיק של $f^{-1}(q)$ יחידה מרחב $m-n$

Sard's Lemma

$f: M \rightarrow N$: חלקה... קבוצת הערכים הקרובים של f ב- N

היא "כלשהו" מידה 0

(*) יהיה קבוצת מידה 0 אם:

כל גרסה קרובית (μ, ϕ) הקבוצה

$$\phi(S_\mu) \subset \mathbb{R}^n$$

כלשהו מידה 0

פרק 7 : שכינות עתה $\mathbb{R}^n$

כלשהו

כל יחידה קרובה $(*)$ ניתנת ששיכון ב- $\mathbb{R}^n$ עבור $N \geq 1$

(*) דרושה הקוגרנטיות אינה הכרחית - פשוט יותר נוחה למחשבה

הוכחה:

נתון לבחור כיסוי סופי $\{(\mu_i, \phi_i)\}_{i=1}^N$

$$\overline{B_1(0)} \subset \phi_i(\mu_i) \subset B_2(0) \quad (1)$$

$$\bigcup \phi_i^{-1}(B_1(0)) \supset M \quad (2)$$

נתן חלוקת יחידה כותם לכיסוי

$$\chi_i = M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\chi_i(p) = \begin{cases} 1 & \text{if } p \in \phi_i^{-1}(B_1(0)) \\ 0 & p \notin \mu_i \end{cases}$$

$$\psi_i : M \rightarrow \mathbb{R}^d \quad (\text{בדור 1})$$

$$\psi_i(p) = \begin{cases} \chi_i \phi_i(p) & \text{if } p \in \mu_i \\ 0 & p \notin \mu_i \end{cases}$$

$$\Phi : M \rightarrow \mathbb{R}^{nd+n} \quad (\text{בדור 2})$$

$$\Phi(p) = (\psi_1(p), \chi_1(p), \dots, \psi_n(p), \chi_n(p))$$

כלשהו בה השיכון המבוקש

(1) Φ איזוטרופה, אם $p \in M$ אז $p \in \phi_i^{-1}(B_1(0))$

בדור איזוטרופה i וכן $\psi_i = \phi_i$ בסביבת הנקודה

$d\psi_i = d\phi_i \leftarrow$ בסביבת הנקודה $d\Phi$ חזק

$\text{rank } d_p \Phi = m \iff$ (1) $p \in \lambda_i^{-1}(1)$ (2) $p \neq q, p, q \in M$ Φ

המשפט

$\Phi(p) \neq \Phi(q) \iff \lambda_i(p) \neq \lambda_i(q) \iff q \notin \lambda_i^{-1}(1)$

המשפט

$\underbrace{\psi(p) = \phi(p)} \neq \underbrace{\phi(q) = \psi(q)} \iff q \in \lambda_i^{-1}(1)$

$\Phi(p) \neq \Phi(q) \iff$

מכיוון שההצגה קומוטטיבית היא חת' + אינסוסה $\iff$ שיכון

(הצגה מתחלפת שבת)

■

המשפט (H. Whitney 1936)

כל חת' m ממדי $\mathbb{R}^{2m+1}$ ניתנת לשיכון ב-
 (ב-1944 $\mathbb{R}^{2m} + \mathbb{R}^{2m-1}$ יש אינסוסה חת' ובה הצדוק
 (בתקופת חת'))

המשפט Nash

כל יחידה חת' היא דיפא' חת' יחידה אלמנטרית ב- $\mathbb{R}^N$

המשפט Nash

אפשר לשכן אינסוסה $(M, g) \rightarrow (\mathbb{R}^N, d)$ שיטת שטוחה מרחקית

המשפט Nash

כל יחידה קומוטטיבית m ניתנת לשיכון ב- $\mathbb{R}^{2m+1}$

המשפט Nash

M האוסטרוס

$$\Delta_M = \{ (x, y) \mid (x, y) \in M \times M, x = y \}$$

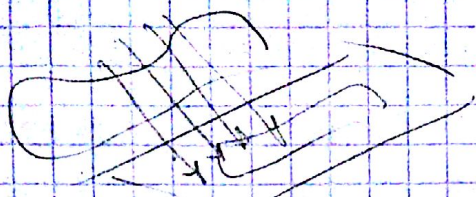
הוא סגור (בחסם טופולוגי) הקבוצה

סדרה (סדרה גרסה) (Sard)

$f: M \rightarrow N$ חלקה ונניח ש- $\dim M < \dim N$

אם $f(M)$ הוא סגור ויש איזה אפס

(הדפוסים לא יכול להיות זה)



הרעיון של ההוכחה

אם יש שיכון לנתון $\mathbb{R}^N$ אולי יש שיכון גם לנתון $\mathbb{R}^{N-1}$

כל עוד $N-1 > 2m+1$ ($n > 2m+1$)

הרעיון פשוט למצוא אישור כך שהתחלה שליו היא גם שיכון.

"האיג" האולי של התחלה הוא "הא" יש כיוון שהושגים בסוף

הנה חותכים את התחלה עם הוותק פס אחר. נאכ (אם לכיוון הפכה

ההוכחה) נשתמש בגרסה שהוכחנו בשליו איבר:

$f: M \rightarrow \mathbb{R}^N$ איברסיה חתך.

ונסמן: $P_v: \mathbb{R}^N \rightarrow H \equiv \mathbb{R}^{N-1}$ את התחלה האורתוגונלית ל-

$H := P_v \mathbb{R}^N = \{ x \in \mathbb{R}^N \mid \langle x, v \rangle = 0 \}$ סגור:

כל $v \in S^{N-1}$ (פרט סקלר קטנה איזה אפס)

ההרכבה $P_v \circ f: M \rightarrow H$ היא איברסיה חתך עבור $N > 2m+1$

הוכחת הטענה:

(סדור פ חלקה)

$$g: M \times M \setminus \Delta_M \rightarrow S^{N-1}$$

$$g(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{\|f(x) - f(y)\|}$$

התחלה (I) הקבוצה $M \times M \setminus \Delta_M$ ירידה חלקה מממד $2m$

ממדה II: כל עוד $2m < N-1$ התחלה של קטנה

איזה אפס - S^{N-1}

$\Leftarrow$ $P_v \circ f$ חתך (פרט סקלר קטנה איזה אפס)