

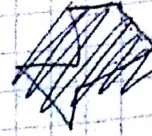


המשך הוכחת המשפט גורדן:

לענה -  $(\epsilon, \epsilon)$ ,  $(\epsilon, \epsilon)$  קטנות

הוכחה: נקח  $\epsilon$ -סביבה של  $A$ ,  $A_\epsilon$

[שאלה: מה הדיושק של  $\epsilon$ ?]  
[עומסין: נקודה יחידה קטנה]



(חברים את העצם)  
לחלקם, כל צלע  
הואילומים, כל צלע  
מבחינתם...

ונקבע  $S' \times [-\epsilon, \epsilon] \supseteq A_\epsilon$ ,  $S' \times \{0\} \supseteq A$

ואז  $A_\epsilon \setminus A = S' \times [-\epsilon, \epsilon] \cup S' \times (0, \epsilon)$

נראה כי כל נקודה  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus A_\epsilon$  נתן לקשור עם נקודה  
ג-  $A_\epsilon^+$  או ג-  $A_\epsilon^-$  מסיבה בתוך  $\mathbb{R}^2$

תהי  $x$  נקודה כלשהי,  $x \notin A_\epsilon$ . אז  $x \notin A$

לחבר את  $x$  ו-  $y$  ביושר אווירי  $y$  שהוא נק' המכנס  
הכאטונה של הקטע עם  $A_\epsilon$

מסקנה -  $(\epsilon, \epsilon)$ ,  $(\epsilon, \epsilon)$  קטנים מספיק

את סעיפים ה, ג של המשפט לא טכני בדיקות

- מחלקים את פנים  $A$  למחלקים (ינס מספר סופי)

- יש הוואיאומורפיזם בין  $A$  ל-  $\mathbb{D}^2$

- באינדוקציה: כל פנים מחלקים  $A$ , ומשתמשים בהם ענה שהיא הוואיאומורפי.  
לדיסק, הוואיאומורפי לחצי דיסק.

### יחידות דימינציות סגורות (משפטים סגורים)

"זה לא נוסט מורכב, אז לא נכלל בהוכחה כלום" - עומסין

צוואת -  $S^2$  ספירה. סגורות קומפקטיות לא נפרד

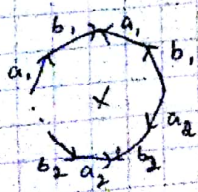
-  $T^2 = S^1 \times S^1$  טורוס. סגורות קומפקטיות לא נפרד

-  $M^2 = \square$  סרט מובילוס. סגורות קומפקטיות לא נפרד

$M^2 = S^1 \times \mathbb{R}$  העפרהו הדימיות המטעות - אחרי הבדקה

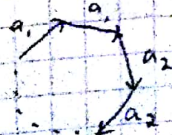
### משפט מיזן על משפטים סגורים

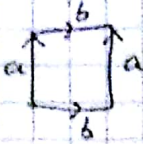
- (1)  $S^2$  - טורוס
- (2) סביבות עם  $g$  יחידות (וגם)
- (3) סביבות עם  $g$  סכטי מובילוס (וגם)



(2) -  $x$  מנוסע עם  $g$  צלעות  
 $\frac{x}{5} = S^2_g \rightarrow$  הדבקת  $a_1$  ל-  $a_2$  ול-  $b_1$  ל-  $b_2$  לפי הכיוונים:

(3)  $x$  מנוסע עם  $2g$  צלעות  
 $\frac{x}{5} = S^2_g \rightarrow$  ככה לא מדבקים  $a_1$  ל-  $a_2$  לפי הכיוונים:



קובעאות - (1)  $S_g^2$ ,  $g=1$   ← טורוס  $T^2$

(2)  $\tilde{S}_g^2$ ,  $g=1$   ← שטח פרויקטיו  $RP^2$   
 (3) טורוס ביאומטרי של  $S_g^2$ :



נשים על שטח הקדקודים ~~שטח~~ ילכו לתורה אחת.

אז  $\sim / \sim_g = \text{סביבה עם } g \text{ חורים}$

ואם  $\sim / \sim_g = \text{טורוס עם } g \text{ חורים (ריבוי)}$

מתאמים בין החורים, ונקרא סדר עם  $g$  טורוסים מקושרים ביניהם

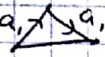
עמה זה יהיה? סדר כל קודה אפשר לקחת משהו. אם זה משהו או כל או קודקוד, המעקף המעטף ממשיך במקום אחד דגמה או טורוס:

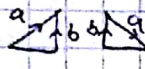


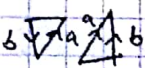
(4) טורוס ביאומטרי של  $\tilde{S}_g^2$ :

נעשה אותה חלוקה כמו קודם.

אז  $\sim / \sim_g = \text{סביבה עם } g \text{ חורים}$

נשים על  $g$ :  ← סרט מובילוס!

עמה? נכריז קודם  ונחבר קודם לפי  $a$  ואז לפי  $b$ :

 ←  ← סרט מובילוס (זהירק)

נחבר כל סרט מובילוס לתוך לאורך העברה.

### מספר אוילר (אנלייטציה)

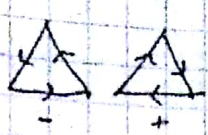
הבדלה - יהי  $X$  מרחב קומפקט.  $Y_i: Y_i \rightarrow T$  קיים  $m=1, \dots, n$  כך שכל  $X = \bigcup_{i=1}^m Y_i$  סופי. שאלה של  $X$  זה כסוי סופי. וגם כל חיתוך בין  $Y_i$  הוא ריק, קודקוד, או נקודה (שלאחרונה יהיה לישיבה). נח  $Y_i$  טיפוס.  $X = \bigcup_{i=1}^m Y_i$  טיפוס. אז מספר אוילר מוגדר:

$$e(X) = V - E + T$$

מחלקים נקודות      קודקודים

מספר - מספר אוילר בלתי תלוי במימוש והוא אינבריאנט טופולוגי.

$$\begin{aligned} e(S^2) &= 2 \\ e(S_g^2) &= 2 - g \\ e(\tilde{S}_g^2) &= 2 - g \end{aligned}$$

הצורה - אורינטציה של מופעים:  $\pm 2$  : 

אורינטציה של מופע (סדר עם נתיבים): האורינטציה של כל מופע כן  
 שאל כל צלע שני ה-1 הצמים מהצירים אורינטציה נגדית: 

אם האורינטציה קיימת אזי  $\text{מחזור}$  הנטות קטנו אורינטציה

משפט - אורינטציות בהם בבחינת שילוש, והוא אינווריאנט אופרטיבי

צומת - סרט מוביל אינו אורינטציה. אפשר לבדוק בשילוש הצבי: 

יריעות חלקות, תתי יריעות, נשיון יריעות, עתון מרחב אוקלידי

\* נבדד קק"ל יריעות על שפה, עמדות, שבה ניתן להכליל

הצורה - תתי יריעה מ- $n$  מימית, הוא יריעה מחלקת "C" אם קיים:

מבנה חלק מסדר A על X זה כסוי פתוח  $X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$   
 כך שכל  $\alpha \in A$  קיים הומומורפיזם  $\mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} U_\alpha$   $\psi_\alpha: U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$   $\psi_\alpha$  אוקלידי  
 ולכן  $\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \mathbb{R}^n$   $f_{\alpha\beta}$   $\psi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{R}^n$

$\psi_\alpha^{-1} \circ \psi_\beta = f_{\alpha\beta} \leftarrow \text{דיפאומורפיזם מסדר } K$

דואליות -  $\mathbb{R}^n, S^n, S^1$  יריעות מסדר  $\infty$

משפט - פה:  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$   $f \in C^k$  (בצורה צפופה א פתוח)  
 נוח  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$   $U \subset \mathbb{R}^m$  פתוח

גרף של  $f$ :  $\Gamma_f = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^{m+n} \mid x \in U, y = f(x) \}$   
 אזי:  $\Gamma_f$  יריעה חלקה מסדר K

הוכחה - נקח כסוי של  $U$  ע"י  $\mathcal{B}_x$   $U = \bigcup_{\alpha \in A} B_{x_\alpha}(\epsilon_\alpha)$

נקח  $U_\alpha = \{ (x, y) \mid x \in B_{x_\alpha}(\epsilon_\alpha), y = f(x) \}$

$\psi_\alpha: U_\alpha \rightarrow B_{x_\alpha}(\epsilon_\alpha) \cong \mathbb{R}^m$

נקבל  $f_{\alpha\beta} = Id$

הצורה - פה: X יריעה חלקה מ- $n$  מימית מסדר K, תת קבוצה  $Y \subset X$   
 נקראת תת-יריעה חלקה מ- $m$  מימית (משמאל) מסדר K אם:  
 קיים מבנה חלק  $X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$  כך שכל נקודה  $x \in Y$  קיימת  $U_\alpha$  כך ש-

$\psi_\alpha: U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$

$\psi_\alpha: U_\alpha \cap Y \rightarrow \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^n$

$\psi_\alpha(x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$

משפט - נת - יריעה מסדר  $k$  מחינת  $m$  היא יריעה  $m$ -מיתית מסדר  $k$

$$Y = \bigcup (U_\alpha \cap Y) \quad \text{הוכחה - נשתמש עם כסוי}$$

כל יריעה  $m$ -מיתית מהצורה

$$\begin{array}{ccc} (U_\alpha \cap Y) \cap (U_\beta \cap Y) & \xrightarrow{f_{\alpha\beta}} & U_\beta \cap Y \\ \downarrow \text{אלו} & & \downarrow \text{אלו} \\ \mathbb{R}^m & & \mathbb{R}^m \end{array}$$

# הרצאה אחרונה

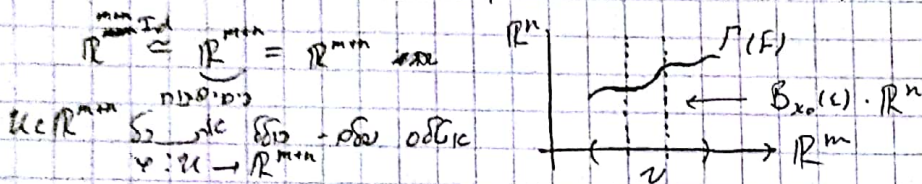
מבחן - מותר להביא חומר ביתנו על הרצאות בלבד

תצביע - תתייחס חלקה - תהי א יריעה  $n$ -מיתית חלקה מסדר  $k$ ,  $X \in \mathbb{R}^m$   
 $\gamma$  תהי יריעה חלקה מסדר  $k$   $\gamma \subset X$   $\gamma$  נקודה  $x \in \gamma$   
 קיימת סביבה  $U$  של  $x$   $U \subset \mathbb{R}^m$   $\gamma \cap U = \gamma$   
 ק שיהיה  $U \subset \mathbb{R}^m$   $\gamma \cap U = \gamma$   
 ולקוח את  $U$  כנאמט

צוטטה -  $\gamma$  של פונקציה חלקה מסדר  $k$ ,  $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$   
 תהי

$$P(F) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \mid x \in U, y = F(x) \}$$

סענה -  $P(F) \subset \mathbb{R}^{m+n}$  תהי יריעה חלקה מסדר  $k$ ,  $n$ -מיתית



אולם נשים -  $\gamma \subset \mathbb{R}^m$   $\gamma \cap U = \gamma$   
 נאמר  $\gamma$   $\gamma \subset \mathbb{R}^m$   $\gamma \cap U = \gamma$   
 נאמר  $\gamma$   $\gamma \subset \mathbb{R}^m$   $\gamma \cap U = \gamma$

$x_0 \in B_{x_0}(\epsilon) \subset U$  נקח  $(x, y) \in P(F)$ , וסביבה  $U$

נבחר קבוצה  $U = B_{x_0}(\epsilon) \times \mathbb{R}^n$

ברור כי  $U \subset \mathbb{R}^{m+n}$ , אך נצטרך שם  $U \cap P(F) \cong \gamma$  תהיה חלקה

$\gamma: U \rightarrow B_{x_0}(\epsilon) \times \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{m+n}$  (בנה)

$\gamma(x, y) = (x, y - F(x))$   $\rightarrow$  נבחר עוד הפעם  $U$   
 $\gamma = F(x)$   $(x, y) \in P(F)$   $\rightarrow$  נבחר  $U$   
 $\gamma(x, y) = (x, 0) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$   $\rightarrow$  נבחר  $U$   
 $\gamma(x_0, y_0) = (x_0, 0)$   $\rightarrow$  נבחר  $U$

נבחר  $U$   $\gamma$   $\gamma \subset \mathbb{R}^m$   $\gamma \cap U = \gamma$

$$\gamma^{-1}(x, y) = (x, y + F(x))$$

משפט

$$\begin{cases} F_1(x) = 0 \\ \vdots \\ F_r(x) = 0 \end{cases}$$

תהי יחידות חתוכות במרחב אנליטי  
(1) תהי  $X \subset \mathbb{R}^n$  המוגדרת על ידי המשוואות

כאשר  $F_1, \dots, F_r$  פונקציות חלקות מסדר  $K$   
קטע  $X$

(2)  $(r \times n)$  (בממדים)

$\text{rank } J(F_1, \dots, F_r)|_x = r$   
אז  $X$  תת ויהיה חלקה מסדר  $K$  ממידת  $n-r$

(3) תהי  $X \subset \mathbb{R}^n$  המוגדרת כפתוחה של חתוכה  
 $\phi: U \rightarrow \mathbb{R}^m$   $U \subset \mathbb{R}^n$  פתוחה ב- $\mathbb{R}^n$   
 $\phi$  חלקה מסדר  $K$  ומקיימת נגזרת קדומה  $X \subset U$   
 $\text{rank } J(\phi)|_x = m$  (בממדים)  
אזי לכל  $x \in U$  קיימת סביבה  $V \subset U$  כך שהפתוחה  
תת יחידה ב-  $\mathbb{R}^n$  חלקה מסדר  $K$   
 $X = \phi(V)$

הוכחה -  
(1)  $\text{rank } J(F_1, \dots, F_r)|_x = r$   $x \in X$   
אז ישו

$$r \times \begin{pmatrix} \det \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_n \\ n \end{matrix}$$

משפט הפונקציה הסתומה קיימת  $x \in U$  כך ש:

$$\begin{cases} x_1 = F_1(x_{r+1}, \dots, x_n) \\ \vdots \\ x_r = F_r(x_{r+1}, \dots, x_n) \end{cases} = X \cap U$$

$$F_1, \dots, F_r \in C^K$$

(2) תרגום

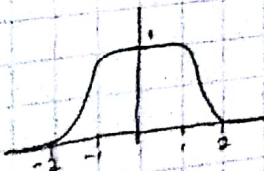
קונסטרוקציה של ספה

משפט

תהי  $X$  יחידה סגורה,  $n$ -ממדית, חלקה מסדר  $K$   
אז קיים  $M \in \mathbb{N}$  ופונקציה  $\phi: X \rightarrow \mathbb{R}^M$  כך ש-  $\phi \in C^K$  זיכוי  
על  $X$  על  $\phi(x)$  שבה תת יחידה חלקה  $n$ -ממדית מסדר  $K$   
( $\phi \in C^K$ , לכל קדומה  $x \in X$  וסביבה  $U \subset X$  מהגודל החלקי,  $\phi(U) \subset \mathbb{R}^M$  יחידה חלקה מסדר  $K$ )  
י"פ  $\phi \circ \gamma$  - חלקה מסדר  $K$

הוכחה -

סגורה - קיימת פונקציה  
ומקיימת: (א)  
(ב)  
 $\lambda \in C^\infty$   $\lambda: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \in B_0(1)$   $\lambda(x) = 1$   
 $x \notin B_0(1)$   $0 < \lambda(x) < 1$   
 $x \notin B_0(2)$   $\lambda(x) = 0$



$$\alpha(t) = \begin{cases} e^{\frac{1}{(1-t)^2}} & 0 \leq t < 1 \\ 0 & t \geq 1 \end{cases}$$

הוכחה:

$$\beta(t) = 1 - \frac{\int_0^t \alpha(\tau) d\tau}{\int_0^1 \alpha(\tau) d\tau}$$

המשך - תרגום באיור

המשך

הוכחה -

נקח כיסוי של  $X$  ונבנות את הפונקציה  $\phi$ :  $X = \bigcup_{i=1}^m U_i$  : הפונקציה  $\phi$  נבנית

$$U_i \subset U_j \subset U_k \cong \mathbb{R}^n, \quad \text{כאשר}$$

$$\varphi_i^{-1}(B_0(1)) \subset \varphi_j^{-1}(B_0(2))$$

$$X = \bigcup_{i=1}^m U_i, \quad \text{מרחב מטריקס}$$

$$N = m \cdot n + m \quad \text{מספר}$$

$$\phi: X \rightarrow \mathbb{R}^N \quad \text{מרחב}$$

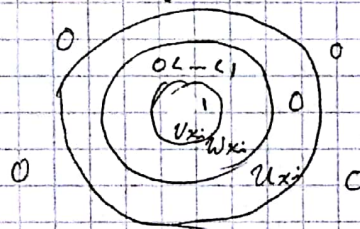
$$\phi = \left( \lambda_1, \dots, \lambda_m, \{ \lambda_{ij} \}_{i=1, j=1}^m \right)$$

$$\lambda_i: X \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{פונקציה}$$

$$\lambda_i(x) = \begin{cases} \lambda(\varphi_i^{-1}(x)) & x \in U_i \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

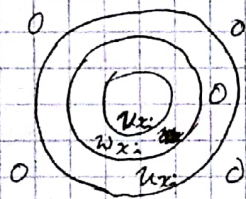
$$\varphi_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (y_1, \dots, y_n)$$

$$\lambda_{ij}(x) = \begin{cases} y_{ij} \lambda_i(x) & x \in U_i \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$



$\lambda_i$

אוסטרומטר



הפונקציה  $\phi$  נבנית

נקח  $x', x'' \in X$  ונבנה

$x' \in U_i, x'' \in U_j$  ונבנה

$\lambda_i(x') = 1, \lambda_j(x'') = 1$

$\varphi_i(x') = (y_1, \dots, y_n), \varphi_j(x'') = (y_1, \dots, y_n)$

$$\lambda_{ij}(x'') = y_{ij}, \lambda_{ij}(x') = y_{ij}$$

$\varphi_i(U_i) = B_0(1), x \in U_i, x \in X$  : הפונקציה  $\phi$  נבנית

$$\phi = \frac{D(\lambda_1, \dots, \lambda_m, \{ \lambda_{ij} \})}{D(y_1, \dots, y_n)} \rightarrow \text{מרחב}$$

מרחב מטריקס

$$\frac{D(\lambda_1, \dots, \lambda_m)}{D(y_1, \dots, y_n)} = \frac{D(y_1, \dots, y_n)}{D(y_1, \dots, y_n)} = I$$

משפט

תתי יריעות חתוכות במרחב אוקלידי  
 $\mathbb{R}^n$  תהי  $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  פונקציה  
 המעבירה את  $\mathbb{R}^m$  אל  $\mathbb{R}^n$

התמונה של  $\mathbb{R}^m$  תהיה מסדר  $k$  והתמונה של נקודה אחת

$$J(\psi)|_x = k$$

אזי לכל נקודה  $x \in \mathbb{R}^m$  קיים סביבה סביבה  $U$  של  $x$  כזו ש-  $\psi(U)$  תהי יריעה מסדר  $k$  המכילה את  $x$ .

כונתה - תרשים (משתמשים באוקלידי סטנדרט)

הצורה - נניח  $\phi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  פונקציה קיימת סביבה  $U$  של  $x$  והתמונה  $\phi(U)$  היא יריעה מסדר  $k$ .  
 $G: U \cap \phi^{-1}(x) \rightarrow \mathbb{R}^n \cap \mathbb{R}^m$

$$\phi^{-1}(x) \cap U \xrightarrow{\phi} \phi(U)$$

$$(\phi^{-1}(x) \cap U, \phi|_{\phi^{-1}(x) \cap U}) \xrightarrow{\phi} (\phi(U), \phi|_{\phi(U)})$$

$$x = \phi^{-1}(x) \cap U \xrightarrow{\phi} \phi(U)$$

$$U = \left\{ \begin{array}{l} \{z_1, \dots, z_m\} \in \mathbb{R}^m : z_1 = \dots = z_k = 0 \\ \{z_1, \dots, z_m\} \in \mathbb{R}^m : z_1 = \dots = z_k = 0 \end{array} \right\}$$

$$\phi(x) \cap U = \{z_1, \dots, z_m\} = (\dots, z_{k+1}, \dots, z_m)$$

נראה שזה ברור שהתמונה

היא יריעה

$$S^m \subset \mathbb{R}^n$$

$$F(x_1, \dots, x_m) = x_1^2 + \dots + x_m^2 - 1$$

אזי כל נקודה יריעה מסדר  $m$  נמצאת בה

$$(x^2 + y^2 + z^2 - 1)^2 + z^2 - 1 = 0 \quad - \quad \mathbb{R}^3$$

כל נקודה יריעה מסדר  $m$  נמצאת בה

$$\gamma: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\gamma'(t) \neq 0$$

המשפט הזה הוא למעשה  
 תוצאה של משפט  
 דיריכלי