

**משפט - קריטריון מספק  $S_2$ - $\delta$**

יהיו  $X, Y$  מרחבי טופולוגיה  
 וכן  $X$  קומפקט, מקומית, וחסום  
 אזי  $C(X, Y)$  מקיים  $S_2$

הוכחה - (ו) לכל נקודה  $x \in X$  וסביבה  $U$  של  $x$  קיימת תת-סביבה  $V$  של  $U$  כך ש-  
 $\{f \in C(X, Y) : f(V) \subset U\}$  (עבור  $T_3$ )

(ב) לכל נבחר בסיס  $\mathcal{B}$  ב- $Y$  ו- $\mathcal{B}$  בסיס ב- $X$   
 ובהינתן  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  סדרה חסומה ב- $X$  ו- $\{y_n\}_{n=1}^\infty$  סדרה חסומה ב- $Y$  קיים  $S_2$ - $\delta$

כל  $x \in X$  וכל סביבה  $U$  של  $x$  קיימת  $V$  של  $U$  כך ש-  
 $\{f \in C(X, Y) : f(V) \subset U\}$  (עבור  $T_3$ )

הסבר - דפי (ו) קיימת סביבה  $U$  של  $x \in X$  וכן קיימת  $V$  של  $U$  כך ש-  
 $\{f \in C(X, Y) : f(V) \subset U\}$  (עבור  $T_3$ )

נקח  $x \in X$  ו- $U$  סביבה של  $x$  ו- $V$  סביבה של  $x$  וכן קיימת  $V$  של  $U$  כך ש-  
 $\{f \in C(X, Y) : f(V) \subset U\}$  (עבור  $T_3$ )

קיימת סדרה  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  ב- $X$  ו- $\{y_n\}_{n=1}^\infty$  ב- $Y$  וכן קיימת  $V$  של  $U$  כך ש-  
 $\{f \in C(X, Y) : f(V) \subset U\}$  (עבור  $T_3$ )

נשים לב - האוסף  $\{f \in C(X, Y) : f(V) \subset U\}$  בסיס ב- $Y$  וכן קיימת  $V$  של  $U$  כך ש-  
 $\{f \in C(X, Y) : f(V) \subset U\}$  (עבור  $T_3$ )

וכיח כי  $\{f \in C(X, Y) : f(V) \subset U\}$  בסיס ב- $Y$  וכן קיימת  $V$  של  $U$  כך ש-  
 $\{f \in C(X, Y) : f(V) \subset U\}$  (עבור  $T_3$ )

נבחר  $f \in C(X, Y)$  ו- $U$  סביבה של  $f(x)$  וכן קיימת  $V$  של  $U$  כך ש-  
 $\{f \in C(X, Y) : f(V) \subset U\}$  (עבור  $T_3$ )

$$f(C) \subset W = \bigcup_{\alpha \in A} T_\alpha$$

אז קיים תת-בסיס סופי:

$$C \subset \bigcup_{i=1}^n F_i^{-1}(T_{\alpha_i})$$

$$C \subset \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{x \in C} \sigma_{h(x, F_i^{-1}(T_{\alpha_i}))} \subset \bigcup_{i=1}^n F_i^{-1}(T_{\alpha_i})$$

$$C \subset \bigcup_{k=1}^m \sigma_{h(x_k, F_i^{-1}(T_{\alpha_i}))}$$

$$F \in \mathcal{U}(C, W) \text{ , } \tau_{\alpha_i} \in \mathcal{U}(C, W)$$

$$\mathcal{U}(C, W) \text{ כי מהבנייה - } F \text{ בסיס ב- } F$$



## קומפקטיות במרחבי המעוקלים

הגדרה - יהיו  $X, Y$  מרחבים מטריים  
 העתקה  $f: X \rightarrow Y$  נקראת רציפה במובן שוורץ אם לכל סדרה קיימת סדרה מתקיימת  
 $P_X(x, x_2) < \delta, x, x_2 \in X$  כך שכל שתי נקודות  $P_Y(f(x), f(x_2)) < \epsilon$

דוגמאות -  $f(x) = ax + b$   
 $f(x) = \sin x$  - רציפות בהמשך

-  $f(x) = e^x$  - לא רציפה בהמשך

משפט - יהיו  $X, Y$  מרחבים מטריים,  $X$  קומפקטי. אז כל העתקה  $f \in C(X, Y)$  היא רציפה בהמשך.

הוכחה - יהי סדרה נסמן  $Y = \bigcup_{y \in Y} B_Y(\epsilon)$

אז  $X = \bigcup_{y \in Y} \underbrace{f^{-1}(B_Y(\epsilon))}_{\text{בתחתית}}$

לפי אחת מלמט, קיים סדרה כך שכל  $B_X(\delta) \subset f^{-1}(B_Y(\epsilon))$  עבור  $y$  שבו.

כל  $x, x_2 \in X$ ,  $P_X(x, x_2) < \delta$ ,  $x_2 \in B_X(\delta) \subset f^{-1}(B_Y(\frac{\epsilon}{2}))$

$f(x), f(x_2) \in B_Y(\frac{\epsilon}{2})$

$P_Y(f(x), f(x_2)) < \epsilon$  סל

משפט - יהי  $X$  מרחב קומפקטי,  $Y$  מרחב מטרי שלם. אז  $C(X, Y)$  מרחב שלם.

הוכחה - תהי  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  סדרת קושי. לכל נקודה  $x \in X$  הסדרה  $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$  היא גם סדרת קושי ב- $Y$ , אזי:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f_0(x)$$

נבדוק ש-  $f_0$  העתקה רציפה.

לדוגמה, רציפה בהמשך נקודתי.

נקח  $x_0 \in X$ ,  $f_0(x_0) \in Y$ .

כל סדרה יטלצטט סביבה  $x_0 \in U_{x_0}$  כך ש-  $P(f(x), f(x_0)) < \delta$  כל  $x_0 \in X$ .

קיים  $N$ , כך ש-  $P(f_n(x_0), f_0(x_0)) < \frac{\epsilon}{3}$

קיים  $N_2$  כך ש-  $P(f_n(x'), f_m(x')) < \frac{\epsilon}{3}$  כל  $x' \in X$ ,  $m, n \geq N_2$

נסמן  $N = \max\{N_1, N_2\}$

$P(f_n(x'), f_n(x_0)) < \frac{\epsilon}{3}$  כן ש-  $x_0 \in U_{x_0}$  קיימת סביבה כל  $x' \in U_{x_0}$

אז כל  $x' \in U_{x_0}$ :

$$\leq P(f_0(x'), f_n(x')) + P(f_n(x'), f_n(x_0)) + P(f_n(x_0), f_0(x_0)) < \epsilon$$

$$\downarrow \quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow$$

$$P(f_0(x'), f_n(x_0)) = \lim_{m \rightarrow \infty} P(f_m(x'), f_n(x')) \leq \frac{\epsilon}{3}$$

דוגמה -  $C([0,1], \mathbb{R})$  אינו קומפקטי:

לקח סדרת פונקציות  $f_n(x) = x^n$

מחזיקים:  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$

אז  $f_n(x)$  מתכנסת לפונקציה  $f$  לא רציפה,  $f \notin C([0,1], \mathbb{R})$

הערה - יהי  $X$  מרחב מטרי,  $Y$  מרחב מטרי,  $X$  מ'ט' כלשהו.  
 תהי  $F \subset C(X, Y)$  קבוצת הסתקות הרצופות באותה מידה  
 אם  $x \in X$  אז  $\{f(x) : f \in F\}$  סגור, כל  $x \in X$   
 קיימת סביבה  $U_x$  כך ש-  $\{f(x) : f \in F\}$  סגור וכל  $x' \in U_x$   
 $\rho(f(x), f(x')) < \epsilon$

**משפט Arzela-Ascoli**

יהי  $X$  מרחב קומפקטי,  $Y = \mathbb{R}^n$ ,  $F \subset C(X, \mathbb{R}^n)$  אזי:

$F$  קומפקטי  $\iff F$  קבוצת פונ' רציפות באותה מידה

ב-  $\delta > 0$   $\exists \epsilon > 0$  כך ש-  $\{f \in F : |f(x) - f(x')| < \epsilon, \forall x, x' \in X, \rho(x, x') < \delta\}$  קבוצה חסומה

דוגמה -  $C([0,1], \mathbb{R})$

$F \subset C([0,1], \mathbb{R})$  אזי  $F$  קומפקטי  $\iff$   $\{f \in F : |f(x)| < M, \forall x \in [0,1], f \in F\}$  חסומה  
 ו-  $\{f \in F : |f(x) - f(x')| < \epsilon, \forall x, x' \in [0,1], \rho(x, x') < \delta\}$  קבוצה חסומה

אזי  $F$  פהי-קומפקטית  $cl(F)$  קומפקטית

הוכחת המשפט -

$\leftarrow$  לקח נקודה  $x \in X$ , ונשתמש בהצטקה האבולוציה שהאמצינו:  $C(X, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n, f \mapsto f(x)$

יש הצטקה רציפה אזי:  $f \in cl(F) \rightarrow \{f(x) : f \in cl(F)\}$   
 קומפקטיות  
 ב-  $\mathbb{R}^n$  סגור חסומה  
 אזי נגסי ב' מתקיים.

נבדוק את א: יהי  $\epsilon > 0$ ,  $x \in X$ , מחפשים את  $U_x$

קיים כיסוי סופי  $cl(F) \subset \bigcup_{i=1}^m B_{F_i(x)}(\epsilon/3)$ ,  $f_1, \dots, f_m \in F$

כל  $i=1, \dots, m$ ,  $x = \bigcup_{x \in X} F_i^{-1}(B_{F_i(x)}(\epsilon/3))$

$X = \bigcup_{j=1}^m F_i^{-1}(B_{F_i(x_{ij})}(\epsilon/3))$   $x$  קומפקטי, סגור

נצייר את:  $U_x = \bigcap_{i=1}^m F_i^{-1}(B_{F_i(x_{ij})}(\epsilon/3))$

באחד  $x \in F_i^{-1}(B_{F_i(x_{ij})}(\epsilon/3))$

$|g(x) - f(x)| \leq \epsilon$   $\forall f \in F$  וכל  $x \in U_x$

$\leq |g(x) - f_i(x)| + |f_i(x) - f_i(x_{ij})| + |f_i(x_{ij}) - g(x)| < \epsilon$

המשקל הוכחה:  $\Rightarrow$  הטאליה: אם  $d(f)$  שלם והיא  $\varepsilon$ -רשת סופית שלם, נאמור נובע "משפט העליון".

הצורה - התנאים, ה' מתקיימים עבור  $d(f)$  (תרגיל)

(1) נכוח ש-  $d(f)$  חסמה.  $x \in X$  נקח סביבה  $x \in U_x$  כך ש-  $\rho(f(x), f(x_i)) < \varepsilon$  לכל  $x_i \in X$   $X = \bigcup_{i=1}^m U_{x_i}$  קיים

מתקיים  $M < \sup_{i=1 \dots m} |g(x_i)|$   $g \in d(f)$

$\sup_{x \in X} |g(x)| < M+1$   $g \in d(f)$

כעומד  $(\bigcup_{x \in X} \{g(x)\}) \subset \overline{B_0(M+1)} = Y$  קומפקט

(2) נקח סדרה  $x \in X$  קיימת  $x \in U_x$   $\varepsilon$ -רשת סופית.  $|g(x) - g(x_i)| < \varepsilon/4$   $g \in d(f)$   $x_i \in U_{x_i}$

קיים  $X = \bigcup_{i=1}^K U_{x_i}$  וכן קיים  $Y = \bigcup_{j=1}^m B_{g_j}(\varepsilon/4)$

וכן קיים  $Y = \bigcup_{j=1}^m B_{g_j}(\varepsilon/4)$

נצייר ת-קבוצה  $J = \left\{ \alpha: \{1 \dots K\} \rightarrow \{1 \dots m\} \mid \begin{array}{l} g \in d(f) \\ \text{כך שקיימת} \\ g(x_i) \in B_{g_{\alpha(i)}}(\varepsilon/4) \end{array} \right\}$  סופית

לכל  $\alpha \in J$  נקח  $g \in d(f)$  כך ש-  $\alpha = \alpha_g$   $\alpha$  סופי

ה-  $g$  האלה הן מרכזי הכבדים ה-  $\varepsilon$ -רשת סופית

נשאר להוכיח שכל  $f \in d(f)$  נמצא ה-  $B_{g_\alpha}(\varepsilon)$  מסוים.

לכל  $x \in X$ ,  $x \in U_{x_i}$  קיימת  $\alpha_f \in J$

$f(x_i) \in B_{g_{\alpha_f}}(\varepsilon/4)$ ,  $j = \alpha_f(i)$

נראה כי  $f \in B_{g_{\alpha_f}}(\varepsilon)$

$$|f(x) - g_{\alpha_f}(x)| \leq \begin{pmatrix} |f(x) - f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{4} \\ + |f(x_i) - g_{\alpha_f}(x_i)| < \frac{\varepsilon}{2} \\ + |g_{\alpha_f}(x_i) - g_{\alpha_f}(x)| < \frac{\varepsilon}{4} \end{pmatrix} < \varepsilon$$

D