הרצאה 8.5 - הרצאת השלמה

" נו, אני הייתי עכשיו ברוסיה, ראיתי מה זה חורף אמיתי.. " שטטין.

תזכורת - מרחבי העתקות

$C(X,Y)$ - טופולוגיה קומפקטית פתוחה

משפט - X קומפקטי, Y מטרי. נגדיר מטריקה ב- $C(X,Y)$: $r(f,g)=\max_{x\in X}\rho(f(x),g(x))$

אזי $\Omega_{co}=\Omega_r$

הערה - השתמשנו בהוכחה ב"מרחק" בין נקודה לבין תת קבוצה:

א - הגדרה - Y מרחב מטרי, $A\subset Y$, $x\in Y$. $\rho(y,A)=\inf_{y'\in A}\rho(y,y')$

ב - טענה - בהנתן $A\subset Y$. הפונקציה $f_A:Y\to\mathbb{R}$

$f_A(y)=\rho(y,A)$ היא רציפה

בנוסף, אם A סגורה, אזי $y\in A \longleftrightarrow \rho(y,A)=0$

הוכחה - יהי $\varepsilon>0$. נקח $y\in Y$.
נסתכל בכדור $D_y(\frac{\varepsilon}{3})$ ונבדוק כי לכל $y'\in D_y(\frac{\varepsilon}{3})$ מתקיים:

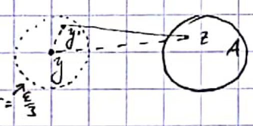
$$|\rho(y',A)-\rho(y,A)|<\varepsilon$$

לכל נק' $z\in A$ מתקיים (כי inf) -

$$\rho(y,z)\ge\rho(y,A)$$

$$\rho(y',z)\ge\rho(y,\cancel{z})-\frac{\varepsilon}{3}$$

אי"ש Δ + ציור



ולכן:

$$\rho(y',A)=\inf_{z\in A}\rho(y',z)\ge\rho(y,A)-\frac{\varepsilon}{3}$$

באותו אופן, $\rho(y,A)\ge\rho(y',z)-\frac{\varepsilon}{3}$

ואז $\rho(y,A)=\inf_{z\in A}\rho(y,z)\ge\rho(y',A)-\frac{\varepsilon}{3}$

ולכן $|\rho(y,A)-\rho(y',A)|\le\frac{\varepsilon}{3}<\varepsilon$

הראינו את החלק הראשון. החלק השני:

אם $y\in A$ אזי $\rho(y,A)=0$. אם $\rho(y,A)=0$ ← כל כדור $D_y(\varepsilon)$
נפגש עם A ← $y\in cl(A)=A$

משפט - יהיו X, X', Y, Y' מרחבים טופולוגיים. $\varphi:X\to X'$, $\psi:Y\to Y'$ רציפות.
אז ההעתקות הבאות רציפות:

$$\varphi^*: C(X',Y)\to C(X,Y)$$
$$f\mapsto f\circ\varphi$$

$$\psi_*: C(X,Y)\to C(X,Y')$$
$$f\mapsto \psi\circ f$$

הערה - ההעתקות φ^*, ψ_* מוגדרות היטב

הוכחה בעמוד הבא

הוכחה - φ^*

נקח $\mathcal{U}(C,W)$, $W\subset Y$ פתוחה, $C\subset X$ קומפקטית.

$$\varphi^{*^{-1}}(\mathcal{U}(C,W)) = \{f:X'\to Y \mid f\circ\varphi\in\mathcal{U}(C,W)\} =$$

$$= \{f:X'\to Y \mid f(\underbrace{\varphi(C)}_{\text{קומפקטית}})\subset \underbrace{W}_{\text{פתוחה}}\} = \mathcal{U}(\varphi(C),W)$$

הוכחה - ψ_*

נקח $\mathcal{U}(C,W)$, $W\subset Y'$ פתוחה, $C\subset X$ קומפקטית

$$\psi_*^{-1}(\mathcal{U}(C,W)) = \{f:X\to Y \mid \psi(f(C))\subset W\} =$$

$$= \{f:X\to Y \mid \underbrace{f(C)}_{\text{ק'}} \subset \underbrace{\psi^{-1}(W)}_{\text{פתוחה}}\} = \mathcal{U}(C,\psi^{-1}(W))$$

משפט - העתקת הערכה

X,Y מ"ט, $x_0\in X$ נגדיר $F_{x_0}: C(X,Y)\to Y$
$f \longmapsto f(x_0)$

זוהי העתקת הערכה.

אזי F_{x_0} רציפה.

הוכחה - נקח $V\subset Y$ פתוחה.

$$F_{x_0}^{-1}(V) = \{f:X\to Y \mid f(x_0)\in V\} = \mathcal{U}(\underbrace{x_0}_{\text{קומפקטית}},\underbrace{V}_{\text{פתוחה}})$$

דוגמה - $A\subset X$, $in: A\hookrightarrow X$ שיכון
לכל מרחב טופולוגי Y מקבלים העתקה רציפה $in^*: C(X,Y)\to C(A,Y)$
זו העתקת הצמצום. $f:X\to Y \longmapsto f|_A : A\to Y$

שאלה - מתי in^* היא על?

תכונות של מרחבי העתקה

משפט - אם Y הוא Hausdorff אזי $C(X,Y)$ Hausdorff לכל X

הוכחה - $f_1,f_2\in C(X,Y)$, $f_1\neq f_2$
קיימת $x_0\in X$ כך ש- $f_1(x_0)\neq f_2(x_0)$
Y Hausdorff אז קיימות סביבות זרות $f_1(x_0)\in V_1$, $f_2(x_0)\in V_2$, $V_1\cap V_2=\emptyset$
אז $f_1\in\mathcal{U}(x_0,V_1)$
$f_2\in\mathcal{U}(x_0,V_2)$