

הערה - "אם אתם רוצים להתחבר... נ, יהיה בסדר" - שוסטין

המטרה הוכחה זאת: $f: X \rightarrow Y$: כל מרחב רשמי ו- S_2 הוא מטריזבלי.

המטרה טענה אחר - מרחב רשמי ו- S_2 הוא נורמלי.

מרחב כזה מקיים גם את F_4 : אם X, Y סדורות ישרות, אז קיימת $f: X \rightarrow Y$ כך ש- $f|_F \equiv 0$, $f|_G \equiv 1$ (לפיכך), F_4 טבע מרחביות (מטריזבלי).

אנחנו רוצים שיהיה $\phi: X \rightarrow I^\infty$ שהוא הומומורפיזם של התמונה:

יהי $\mathcal{B}$ בסיס טופולוגי ב- X בן מנייה (קיים S_2).

נסמן ב- $\tilde{\mathcal{B}}$ את: $\tilde{\mathcal{B}} = \{ (u, v) \mid u, v \in \mathcal{B}, cl(u) \cap v \neq \emptyset \}$ גם בת מנייה.

נסתכל בהעתקה $\phi: X \rightarrow I^\infty = I^{\tilde{\mathcal{B}}}$ קיים F_4 -

$\phi(x) = (f_{(u,v)}(x))_{(u,v) \in \tilde{\mathcal{B}}}$
 כאשר $f: X \rightarrow [0,1]$: $f|_u = 0$, $f|_v = 1$
 (כלומר, בקואורדינטה (u,v) היא $f_{(u,v)}(x)$ (כמובן).

אם ϕ כזו, מניין ϕ כזה, $f_{(u,v)}$ כזה.

ב- ϕ חתך: נקח $x \neq y$.

קיימת סביבות בסיסיות u, v כך ש- $x \in u$, $y \in v$ ו- $u \cap v = \emptyset$.
 (סביבה בסיסית, סביבה פתוחה)

כך ש- $cl(u) \cap v = \emptyset$.

אז $f_{(u,v)}(x) = 0$, $f_{(u,v)}(y) = 1$ אז ϕ חתך.

על ϕ העתקה פתוחה של התמונה, ולכן הומומורפיזם. נוכיח:

נקח נקודה $x \in X$, סביבה בסיסית u .

קיימת תת סביבה בסיסית v כך ש- $x \in v$ ו- $cl(v) \cap u = \emptyset$.
 יפונקציה כזו: $f_{(u,v)}: X \rightarrow [0,1]$: $f_{(u,v)}(x) = 0$, $f_{(u,v)}(x \setminus u) = 1$.
 נסתכל על הקבוצה:

$\tilde{u} = \{ z \in I^\infty \mid \sum_{(u,v) \in \tilde{\mathcal{B}}} z_{(u,v)} < 1 \}$

קבוצה זו פתוחה (על ידי תחשיב).

$\phi(x) \in \tilde{u}$: $\phi(x) \in \tilde{u} \iff \sum_{(u,v) \in \tilde{\mathcal{B}}} \phi(x)_{(u,v)} < 1$
 פתוח ב- $\phi(x)$: $\phi(x) \in \tilde{u} \iff \phi(x) \in \tilde{u}$ (תכונה)

□

מרחב מנה (quotient)

$$Z = \{A_\alpha \mid \alpha \in A\}$$

$$X = \bigcup_{\alpha \in A} A_\alpha, \quad A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset, \quad A_\alpha \subset X$$

הזדקה - יהי X מרחב טופולוגי, Z חלוקה של המרחב על ידי קבוצות זרות.

$$X/\sim = \{[A_\alpha] \mid \alpha \in A\}$$

$\xrightarrow{\text{איבר אחד ב-}} X/\sim$

$$p: X \rightarrow X/\sim \text{ הטלה}$$

$$p(x) = [A_\alpha], \quad x \in A_\alpha$$

$$\{U \subset X/\sim \mid p^{-1}(U) \text{ פתוח ב-} X\} = \mathcal{O}_{X/\sim}$$

$$\text{שאלה 1 - } (X/\sim, \mathcal{O}_{X/\sim}) \text{ מרחב טופולוגי}$$

$$\text{2) } p: X \rightarrow X/\sim \text{ הפסקה רציפה}$$

$$\text{3) } \mathcal{O}_{X/\sim} \text{ סופרלוציה המקסימלית ב- } \mathcal{O}_X \text{ רציפה}$$

$$\text{1) } \dots$$

$$\text{2) } \mathcal{O}_{X/\sim}$$

$$\text{3) } \text{אם } U \subset X/\sim \text{ קבוצה נוספת ב- } \mathcal{O}_{X/\sim}, \text{ המקור לא פתוח, והרציונות נשברת.}$$

$$\text{הזדקה - } X/\sim \text{ נקרא מרחב מנה}$$

$$\mathcal{O}_{X/\sim} \text{ נקרא סופרלוציה מנה}$$

$$\text{שאלה 2 - } F \subset X/\sim \text{ סגורה} \iff p^{-1}(F) \subset X \text{ סגורה}$$

הוכחה - פורמלית.

$$\text{הזדקה - } A \subset X \text{ מקראת שאלה בוחס ב- } Z, \text{ אם } A' \subset A, \text{ אז } A' = \bigcup_{\alpha \in A'} A_\alpha$$

$$\text{שאלה 3 - } A \subset X \text{ שאלה} \iff A = p^{-1}(p(A))$$

$$\text{2) } \text{תמונה של } A \text{ שאלה} \iff \text{ב- } X \text{ (היא) פתוחה סגורה ב- } X/\sim$$

הוכחה - משתק עם הזדקה.

$$\text{משפט - אם } X \text{ מרחב טופולוגי, אז } X/\sim \text{ מרחב טופולוגי (גרתימארה).}$$

$$\text{הוכחה - } p: X \rightarrow X/\sim \text{ רציפה, (ואם כל תכונה יש מרחב טופולוגי טופולוגי סגור).}$$

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ \bullet \text{ } x' \\ \text{---} \\ \bullet \text{ } x'' \\ \text{---} \end{array}$$

$$\text{דוגמה - } X = \mathbb{R} \cup \mathbb{R} \text{ איחוד של שני קווים}$$

$$\text{נקח: } \mathbb{Z} = \{x', x''\}, \text{ } x' \in \mathbb{R}, \text{ } x'' \in \mathbb{R}$$

ותקבל:

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ \bullet \text{ } x' \\ \text{---} \\ \bullet \text{ } x'' \\ \text{---} \end{array}$$

מרחב זה איננו Hausdorff.