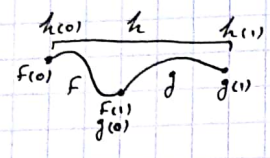


קטירות מסילתית

הבדלה - יהי X מ"ט, $I = [0,1]$
 מסלול ב- X זוגית הצורה רציפה
 $f: I \rightarrow X$
 נקודות $f(0)$ - התחלה, $f(1)$ - סוף
 דוגמה - מסלול קבוע:
 $f: [0,1] \rightarrow X$
 $t \mapsto x_0$
 $\forall t \in [0,1]$

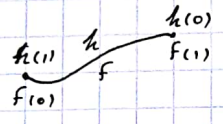
הבדלה - (1) מכנסת מסילות
 X מ"ט, $f: I \rightarrow X$, $g: I \rightarrow X$, $f(1) = g(0)$
 נגזיר:
 $f * g = fg = h: [0,1] \rightarrow X$



$$h(t) = \begin{cases} f(2t) & , 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(2t-1) & , \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

h מעברת היטה ורציפה ואכן היא אכן מסילה.

(2) מסילה נגזית/רופפת
 X מ"ט, $f: I \rightarrow X$ מסילה.



$$h: [0,1] \rightarrow X$$

$$h(t) = f(1-t) = \overleftarrow{f}(t)$$

הבדלה - X מ"ט, $a, b \in X$
 $a \sim b$ אם קיימת מסילה $f: I \rightarrow X$, $f(0) = a, f(1) = b$
סמך - יחס זה הוא יחס שקילות.

- קובעה:
- א - $a \sim a$ (מסילה קבועה)
 - ב - $a \sim b \iff b \sim a$ (מסילה נגזית)
 - ג - $a \sim b, b \sim c \iff a \sim c$ (מכנסת מסילות)

הבדלה - X מ"ט, נקרא קטיר מסילתית אם יש שתי נקודות $a, b \in X$ שקולות ע"י מסילות:
 קיימת מסילה $f: I \rightarrow X$, $f(0) = a, f(1) = b$
הערה - קטירות מסילתית נשמרת ע"י הומומורפיזמוס.

דוגמה - דוגמה נגזית עקב $X = A$ קטירה מסילתית $\nleftrightarrow cl(A)$ קטירה מסילתית
 נבנה תת קבוצה קטירה מסילתית עם סגור כל קטיר מסילתית.

$$A = \{ \gamma \in \mathbb{R}^2 \mid \gamma = \sin(\frac{1}{x}) \text{ , } x \in (0,1] \}$$

$$cl(A) = A \cup \{ (0,t) \mid t \in [-1,1] \}$$

- טענה 1 - A קטירה מסילתית
 - טענה 2 - $cl(A)$ אינו קטיר מסילתית.
- הוכחות בקל הבא.

הוכחת 1 - נמצא את A עקטור בין a ו- b , ונראה $\delta - I$.
 הוכחת 2 - נניח שקיימת $f: I \rightarrow cl(A)$ קט. $f(1) = (1, \sin 1)$, $f(0) = (0, 0)$.
 $\Pr_x: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ הסקה של ציר x .
 נבנה סדרה יורדת $t_n \in [0, 1]$ כך $\Pr_x \circ f(t_n) = \frac{2}{(2n+1)\pi}$.
 נראה $n=1$:

$$\Pr_x \circ f(0) = 0 \Rightarrow t_1 \in [0, 1] \text{ קיימת}$$

$$\Pr_x \circ f(1) = 1 \Rightarrow \Pr_x \circ f(t_1) = \frac{2}{3}\pi \text{ (משפט וייטסטראס)}$$

$$\Pr_x \circ f(0) = 0 \Rightarrow t_2 \in [0, t_1] \text{ קיימת}$$

$$\Pr_x \circ f(t_1) = \frac{2}{3}\pi \Rightarrow \Pr_x \circ f(t_2) = \frac{2}{5}\pi$$

וממשיכים...
 סדרה $\{t_n\}$ יורדת ומסומת, אז קיים גבול $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t_0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(t_n) \text{ אזי קיים (מחצית)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr_x \circ f(t_n) = 0 \text{ עכן קיים}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr_y \circ f(t_n) = \text{וכן קיים}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{(2n+1)\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n+1} = 0 \text{ שורה}$$

משפט - יהי $X = \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$, כל X_α קטורה מסילתית, $\bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha \neq \emptyset$.

אז X קטור מסילתית.

הוכחה - תרגיל.

משפט - $F: X \rightarrow Y$ רציפה. X קטורה מסילתית $\Leftarrow F(X)$ קטורה מסילתית.

$$\text{הוכחה - (משפט גרשקוויץ). קיימת } x_0 \in X, F(x_0) = y_0$$

$$F(x_1) = y_1, x_1 \in X$$

X קטור מסילתית אז קיימת מסילה: $q: [0, 1] \rightarrow X$, $q(0) = x_0$, $q(1) = x_1$.
 אזי:

$$F \circ q: [0, 1] \rightarrow Y$$

$$F \circ q(0) = y_0, F \circ q(1) = y_1, F \circ q \text{ רציפה בהכרח רציפות.}$$

הגדרה - יהי X מט, מחלקות קטורות מסילתיות X -קטורי, רכיבי קטורות מסילתיות.

למה - רכיבי קטורות מסילתיות הם תתי הקבוצות המקסימליות הקטורות מסילתיות.

הוכחה - נבדוק מידית מתמלית שהוכחנו.

משפט - אם X קטור מסילתית אז X קטור.

הוכחה - נקח $a \in X$, וכל $x \in X$ נבנה מסילה $f_x: I \rightarrow X$, $f(0) = a$, $f(1) = x$.

$$X = \bigcup_{x \in X} F_x[0,1]$$

קטורה (הצטרף רציפה מקט קטור היא קטורה)

וגם $a \in \bigcap_{x \in X} F_x[0,1] \leftarrow$ אז החיתוך לא ריק.

וכן X קטור.

דוגמה - $A \subset \mathbb{R}^2$, $A = \{(x, y) \mid x \in (0,1), y = \sin \frac{1}{x}\}$, A קטורה מסילתית $\leftarrow$ קטורה $cl(A) \leftarrow$ קטור $cl(A)$ אבל $cl(A)$ אינו קטור מסילתית.

$$cl(A) = A \cup \{(0, t) \mid t \in [-1,1]\}$$

2 רכיבי קטורות מסילתית.

הערה - נשים לב שכל קטורת מסילתית אינו חייב להיות סגור.

דוגמה - S_1, S_2 - אינם הומוטופים.

נניח שקיים הומוטופיה $F: S_1 \rightarrow S_2$ סתירה הפאנצ'ר!

$$F: S_1 \rightarrow S_2$$

נסתעבס $F: S_1 \rightarrow S_2$

קטור מסילתית $\leftarrow$ קטור מסילתית

סותר

הערה - נניח $a \in X$ קטור מסילתית מקומית אם לכל נקודה $x \in X$ קיימת סביבה $U \ni x$ ש- U קטורה מסילתית.

הערה - מקומיות היא משני סוגים:
1- "קיימת סביבה בעלת התכונה" (חלט יתכן)
2- "לכל סביבה קיימת תתסביבה בעלת התכונה" (חזק יותר)

הערה - קטורת מסילתית $\leftarrow$ קטירות מסילתית מקומית.

משפט - אם X קטור וקטור מסילתית מקומית אז X קטור מסילתית.

$$X = \bigcup L$$

רכיבי קטורת מסילתית

כל רכיב קטירות מסילתית L הוא פתוח, כי:
 $a \in L$, קיימת סביבה $U \ni a$, U קטורה מסילתית. $U \subset L$ (תתכלול למי)

$$X = \bigcup L$$

רכיבי קטירות מסילתית

אז מקטירות יש רק קבוצה אחת.

מסקנה - כל קבוצה פתוחה קשורה היא קשורה מסליתית.

הוכחה - נראה כי U קשורה מסליתית מקומית.
 $a \in U, U \cap (U^c)^c = U$. בדיוק הוא קשור מסליתית.

קטגוריה (הפדרה)

הפדרה - $\mathcal{T}$ מקיים את T_0 אם לכל $a \neq b$ יש שתי סביבות U_a, U_b כך ש:
 $a \in U_a, b \notin U_a$ או $a \in U_b, b \notin U_b$

הפדרה - $\mathcal{T}$ מקיים את T_1 אם לכל $a \neq b$ יש שתי סביבות U_a, U_b כך ש:
 $a \in U_a, b \notin U_a$ ו- $b \in U_b, a \notin U_b$

קבוצות - (1) $\{a, b\}$ טיפוס דיסקרטי.

(2) $\{a, b\}$ $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a, b\}\}$.

(3) כל מרחב מטרי הוא בעל T_1 .

(4) X מרחב עם טופולוגיה ק-פינית. $\mathcal{T}$ מקיים את T_1 .

למה - X מקיים את $T_1 \iff$ כל נקודה היא תת-קבוצה סגורה

הוכחה - $\Leftarrow$ מניחים $\mathcal{T}$ מקיים את T_1 ונראה כי כל נקודה היא תת-קבוצה סגורה.
 $a \neq b \Rightarrow U_a = X \setminus \{b\}, U_b = X \setminus \{a\}$

הפדרה - מרחב טופולוגי X נקרא מרחב Hausdorff (מקיים את T_2) אם לכל $a \neq b$ יש שתי סביבות U_a, U_b כך ש:
 $a \in U_a, b \notin U_a$ ו- $b \in U_b, a \notin U_b$

קבוצה - (1) מרחב X אינסופי עם טופולוגיה ק-פינית מקיים את T_1 ולא את T_2 .
 - כל מרחב מטרי הוא Hausdorff

הפדרה - תהי $x_n \in X$ סדרת נקודות במרחב טופולוגי X .
 הנקודה $x \in X$ נקראת גבול של $\{x_n\}$ אם לכל סביבה U של x קיים N כזה ש- $x_n \in U$ לכל $n \geq N$.

למה - יהי X מרחב Hausdorff. אם $x_n \rightarrow x$ ו- $x_m \rightarrow y$ אז $x = y$.
 הוכחה - נניח $x \neq y$. אז יש סביבות U_x, U_y כך ש- $x \in U_x, y \notin U_x$ ו- $y \in U_y, x \notin U_y$.
 אז $x_n \in U_x$ לכל $n \geq N_1$ ו- $x_m \in U_y$ לכל $m \geq N_2$.
 סתירה.

הוכחה - נניח $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$ אז $a = b$.

נקח $a \in U_a, b \in U_b$ כך ש- $U_a \cap U_b = \emptyset$.
 קיים N_1 כזה ש- $x_n \in U_a$ לכל $n \geq N_1$.
 קיים N_2 כזה ש- $x_n \in U_b$ לכל $n \geq N_2$.

קבוצה - נקח $\mathbb{Z}$ עם טופולוגיה קופינית.
 אזי הסדרה $1, 2, 3, \dots$ מתכנסת לכל מספר.

למה - יהי X מרחב H . אז $A \subset X$.
 אזי A עם H בטופולוגיה המורשת.

הוכחה - $a \neq b \Rightarrow U_a' = A \cap U_a, U_b' = A \cap U_b$
 $U_a' \cap U_b' = \emptyset$

הערה - $\mathcal{U}$ x מקיים את T_2 אם $x \in A$ נקודה
 $x \in A$ נקודה שארה $A \subset X$ כך ש- $a \in A$ קיימות סביבות זרות:
 $\mathcal{U}_a \cap \mathcal{U}_A = \emptyset$, $a \in \mathcal{U}_a \subset X$, $A \subset \mathcal{U}_a$ יקום -

$\mathcal{U}$ המקיימים T_1, T_3 נקראות רצפות.

הערה - $T_3 \not\Leftarrow T_2$, $T_3 \not\Leftarrow T_1$, $T_1 \not\Leftarrow T_3$

דוגמה - מרחב אנטי-דיסקרטי מקיים את T_3 אבל לא את T_1 .

הערה - $\mathcal{U}$ x מקיים את T_4 אם לכל שתי קבוצות פזורות זרות $A, B \subset X$, $A \cap B = \emptyset$ קיימות סביבות זרות:

$$\mathcal{U}_A \cap \mathcal{U}_B = \emptyset \quad \text{כך ש-} \quad A \subset \mathcal{U}_A \subset X \quad B \subset \mathcal{U}_B \subset X$$

$\mathcal{U}$ המקיימים T_1, T_4 נקראות טרנפיות.

הערה - $T_4 \not\Leftarrow T_3$, $T_4 \not\Leftarrow T_2$, $T_4 \not\Leftarrow T_1$

משפט - טרנפיות $\Leftarrow$ רצפות $\Leftarrow$ Hausdorff $\Leftarrow T_1 \Leftarrow T_0$

משפט - $\mathcal{U}$ מרחב מטרי הוא טרנפי.

הוכחה - כבר בדקנו את T_2 , ולכן T_1 .
 נבדוק את T_4 .

$A, B \subset X$ סבבות זרות.

א - אם נקודה $x \notin A$ קיים סביבה $r_{x,A}$ כך ש- $D_{r_{x,A}}(x) \cap A = \emptyset$
 ב - אם נקודה $y \notin B$ קיים סביבה $r_{y,B}$ כך ש- $D_{r_{y,B}}(y) \cap B = \emptyset$
 ג -

$$\mathcal{U}_A = \bigcup_{y \in A} D_{r_{y,B/2}}(y) \subset A$$

$$\mathcal{U}_B = \bigcup_{x \in B} D_{r_{x,A/2}}(x) \subset B$$

$$\mathcal{U}_A \cap \mathcal{U}_B = \emptyset \quad \text{סגורה -}$$

הוכחה - נניח שקיימת $z \in \mathcal{U}_A \cap \mathcal{U}_B$.
 $z \in D_{r_{y,B/2}}(y)$
 $z \in D_{r_{x,A/2}}(x)$

$$\rho(x,z) < \frac{r_{x,A}}{2}, \quad \rho(y,z) < \frac{r_{y,B}}{2} \quad \text{לפי}$$

$$\rho(x,y) < \frac{r_{x,A} + r_{y,B}}{2} \leq r_{x,A} \quad \text{לפי}$$

לפי. $A \ni y \in D_{r_{x,A}}(x)$ סתירה.