

5. קבוצות צבופות

הגדרה - X מ"ט, $A \subset X$, $\mathcal{C}$ צבופה ב- X אם $cl(A) = X$

משפט - A צבופה ב- $X \iff$ לכל קבוצה פתוחה $U \subset X$ מתקיים $A \cap U \neq \emptyset$

הוכחה - $\leftarrow$ נניח ש- $cl(A) = X$

נקח $U \subset X$ פתוחה. אם $A \cap U = \emptyset$ אזי כל $x \in U$ חיצוני ל- A (היטעם). $cl(A) = X$ אז סתירה. $\Rightarrow$ התנאי השני אומר שכל נקודה היא נקודת ~~צבופה~~ הצטברות. $cl(A) = X$ אם $\mathcal{C}$ צבופה.

דוגמה - $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{Q}^* \subset \mathbb{R}^*$ צבופות

הגדרה - X מ"ט, $A \subset X$, $\mathcal{C}$ צבופה פחמטונית אם $Int(cl(A)) = \emptyset$ (נקראת גם צבירה)

משפט - $A \subset X$ אי-צבופה פחמטונית $\iff$ לכל $U \subset X$ פתוחה קיימת $V \subset U$ ש- $V \cap A = \emptyset$

הוכחה - $\Leftarrow$ $Int(cl(A)) = \emptyset$. נקח $U \subset X$ פתוחה.

אזי $U \not\subset Int(cl(A))$. אם $U \cap cl(A) = \emptyset$ נקבל $A \cap U = \emptyset$. נניח שהשעיה $U \cap cl(A) \neq \emptyset$. $U \cap cl(A) \neq \emptyset$ מתקיים $U \cap cl(A) \neq \emptyset$, $V \subset U$ פתוחה, $V \cap A = \emptyset$. כל נקודה $x \in V$ היא נקודת הצטברות. $A \cap V = \emptyset$ סתירה.

דוגמה - $\mathbb{R} \ni x \in \mathbb{Q}$, קבוצת קנטור - אי צבופה פחמטונית.

דוגמה - משפט קורטובסקי (Kuratowski) (cl) יוצר, נשאר פתוח (מתקיים) $x \in Int(A) \implies A \subset cl(A)$ שבתם לסגורה.

... $Int(cl(Int(A)))$, $cl(Int(A))$, $Int(A)$, A , $cl(A)$, $Int(cl(A))$, $cl(Int(cl(A)))$.

(1) לכל $x \in A$, $A \subset X$, מספר האיברים בסגורה זו סופית.
(2) קיים $x \in A$, כך שכל $U \subset X$ שכוללת x מכילה A .

6. אפולוסה מושרית/חסית (relative/induced)

הגדרה - יהי X מ"ט, $\Omega \subset X$ אפולוסה. $A \subset X$ תהי קבוצה.

$\Omega_A = \{A \cap U \mid U \in \Omega\}$ או $V \in A$ פתוחה (ב- A) $\iff V = A \cap U$ עבור $U \in \Omega$ (ב- X)

משפט - Ω_A אפולוסה ב- A , ונקראת אפולוסה מושרית.

משפט - X, Y מ"ט, $B \subset A \subset X$, $\Omega_B = (\Omega_A)_B$ (גרניט ביז) $A \subset X$

משפט - יהי X מרחב מטרי, $f: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, $p_A: A \times A \rightarrow \mathbb{R}$ מטריקה ג-א, אזי -

$$\Omega_{p_A} = \Omega_A$$

הסתקת רציפות

דוגמה - $f: X \rightarrow Y$, $X = Y = \mathbb{R}^2$
 f רציפה אם לכל $x_0 \in X$ ולכל סדרה קיימים סדרה $f(x_n) \in D_{f(x_0)}(\epsilon)$ מתקיים $x_n \in D_{x_0}(\delta)$ כך שעל קודקודים $x \in D_{x_0}(\delta)$ מתקיים $f(x) \in D_{f(x_0)}(\epsilon)$

שמה - $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ רציפה $\iff$ מקור של כל קבוצה פתוחה $U \subset \mathbb{R}^2$ פתח $(f^{-1}(U) \subset \mathbb{R}^2)$ במרחב המקור

הגדרה - X, Y מ"ט, $f: X \rightarrow Y$ אם $U \subset Y$ פתוח, אז $f^{-1}(U) \subset X$ פתוח. הסתקת רציפה

הגדרה - X, Y מ"ט, $f: X \rightarrow Y$ הסתקת רציפה בקודקוד $x_0 \in X$ אם לכל סביבה $V \subset Y$ של $f(x_0)$ קיימת סביבה $U \subset X$ של x_0 כך ש- $f(U) \subset V$

משפט - $f: X \rightarrow Y$ רציפה $\iff$ f רציפה בכל נקודה של X
 הוכחה - תרגיל

משפט - $f: X \rightarrow Y$ רציפה $\iff$ מקור של כל קבוצה פתוחה $U \subset Y$ סגור ב- X

הגדרה - X, Y מ"ט, $f: X \rightarrow Y$ היא הומומורפיזם אם:
 (1) f רציפה
 (2) f הסיבה
 (3) f^{-1} רציפה

קומפוזיציה - $Id: X \rightarrow X$
 $f: X \rightarrow Y$ הומו $\iff$ $f^{-1}: Y \rightarrow X$ גם הומו
 $f: X \rightarrow Y$ הומו, $g: Y \rightarrow Z$ הומו $\iff$ $g \circ f: X \rightarrow Z$ הומו
שמה - הרכבה של התקנות רציפות היא רציפה:
 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$
 $g \circ f$

$$f^{-1}(g^{-1}(U)) = (g \circ f)^{-1}(U) \subset X$$

פתוחה מרציפות g
 פתוחה מרציפות f

משקלה - יחס הומומורפי הוא יחס שקילות.

כעת נכלל לנסח את המשפטים המרכזיים בטבלה אחת - מיון מרחבים טופולוגיים כדי איזומורפיזם.

Poincaré

דוגמה - הערכת

הש"ה - חובד שריונה תלת מימדית סגורה ופשוט קטר
היא הומומורפיזם $S^3 \rightarrow S^3$ $\{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\}$

משפט Poincaré קנה השקפת-הומו' מובהבת, ויטור.

למה - ציונים של השקפה רציפה חלו רציף, אם $f: X \rightarrow Y$ רציף, אז $A \subset X$, $f|_A: A \rightarrow Y$ רציף.

הוכחה - $U \subset Y$ פתוחה, $(f|_A)^{-1}(U) \subset A$

$$= f^{-1}(U) \cap A$$

פתח כי חיתוך סופיים פתוחים הוא פתח

למה - ציונים של השקפה רציפה $f: X \rightarrow Y$ רציפה, $f(x) \in U$ $\leftarrow$ $f: X \rightarrow Y$ רציפה, $f(x) \in U$

הוכחה - $V \subset f^{-1}(U)$ פתוחה, $V = f^{-1}(U) \cap A$
 $f^{-1}(U) = f^{-1}(V)$ פתוח כי f רציפה.
לכן $f^{-1}(U)$ פתוח.

הזכרה - $X = \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ כיסוי, $f: X \rightarrow Y$ רציפה, $f|_{X_\alpha}: X_\alpha \rightarrow Y$ רציפה, $f(x) \in U$ $\leftarrow$ $f: X \rightarrow Y$ רציפה, $f(x) \in U$

דוגמה - $X = \bigcup_{x \in X} \{x\}$ הוא כיסוי, אך $\{x\}$ לא כיסוי יסודי

משפט - (1) כל כיסוי פתח הוא יסודי (כל $A \subset X$, X_α פתוח)
(2) כל כיסוי סגור סופי הוא יסודי (כל $A \subset X$, X_α סגור וסופי)

הוכחה - (2) $X = \bigcup_{i=1}^n X_i$, $X_i \subset X$, X_i סגור.

$f: X \rightarrow Y$ רציפה בהנחה ש- $f_i: X_i \rightarrow Y$ רציף, $f(x) \in U$ $\leftarrow$ $f: X \rightarrow Y$ רציפה, $f(x) \in U$

$$\bigcup_{i=1}^n f_i^{-1}(U) = f^{-1}(U)$$

סגורה כי-סגור

סגור באחדות של קבוצות סגורות.

(S' - מעגל ב- $\mathbb{R}^2$) $f: [0, 2\pi] \rightarrow S^1$ קומפאקט -

רציפה, הקצה, אפס לא הומו'. $f'(t)$ לא רציפה ב-0

$$f(t) = (\cos(t), \sin(t))$$

$$D^n \approx \mathbb{R}^n \rightarrow \text{נוור סגור}$$

$$\overline{D^n} \approx I^n \rightarrow \text{נוור סגור}$$

$$\overline{D^n} \not\approx \mathbb{R}^n$$

$$(\mathbb{R}^m \not\approx \mathbb{R}^n) \quad (m \neq n)$$

הכינו ~~שאלה~~ קטגוריה טופולוגית (קסט)
 בקטגוריה יש אוגמנטים (מרחבים טופולוגיים) ומורפיזמים (רשתות רציפות)

קטגוריות

יהי X מרחב טופולוגי. ϕ, X קבוצות פתוחות וסגורות.

השקרה - מ"ט X נקרא קשיר (connected) אם אין יתני קבוצות פתוחות-סגורות פה $\phi \neq X$ ו- ϕ .

השקרה - (1) X קשיר אם הוא אינו ניתן לפירוק $X = U \cup V$
 שקורות (2) X קשיר אם הוא אינו ניתן לפירוק $X = F \cup G$
 (1) X קשיר אם $X = U \cup V$ $U \cap V \neq \emptyset$
 (2) X קשיר אם $X = F \cup G$ $F \cap G \neq \emptyset$
 U, V פתוחות זרות, לא ריקות.
 F, G סגורות, זרות, לא ריקות.
 $U = \emptyset$ או $U = X$
 $F = \emptyset$ או $F = X$

השקרה - X מ"ט, $A \subset X$.
 תת קבוצה קשירה אם היא קשירה בטופולוגיה מוטית.

משפט - X מ"ט, $A \subset X$. A קשירה $\leftarrow cl(A)$ קשיר

הוכחה - נניח כי $cl(A) = F \cup G$ סגורות וזרות

$$A = (F \cap A) \cup (G \cap A)$$

סגורות וזרות ב- A

$$F \cap A = \emptyset \iff A \subset G \iff cl(A) \subset G \iff cl(A) \cap F = \emptyset \iff F = \emptyset$$

משפט - יהי $X = \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ כיסוי קר של X .
 אזי X קשיר.

הוכחה - $X = U \cup V$
 $U = \emptyset$ או $V = \emptyset$
 U, V פתוחות וזרות

$$X_\alpha = (X_\alpha \cap U) \cup (X_\alpha \cap V) \quad X_\alpha \cap U = \emptyset \text{ או } X_\alpha \cap V = \emptyset$$

$$X_\beta = (X_\beta \cap U) \cup (X_\beta \cap V) \quad X_\beta \cap U = \emptyset \text{ או } X_\beta \cap V = \emptyset$$

נקח של A $X_\gamma \in V$, וסבן $X \subset V$ אז $U = \emptyset$

משפט - $f: X \rightarrow Y$ רציפה. אם X קשיר אז $f(X) \subset Y$ קשיר.

הוכחה - נניח ש- $f(X) = U \cup V$ פתוחות וזרות.

$$f(X) = U \cup V \iff f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V) = X \iff f^{-1}(U) = \emptyset \text{ או } f^{-1}(V) = \emptyset \iff U = \emptyset \text{ או } V = \emptyset$$

הסקרה - קשיחות זו אינו ריאנטה טופולוגית.

משפט - כל קטע $[a, b] \subset \mathbb{R}$ הוא קטיר

הוכחה - נניח $[a, b] = U \cup V$, פתוחות וזרות.
 נגדיר $f: [a, b] \rightarrow \{1, -1\}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in U \\ -1 & x \in V \end{cases} \rightarrow$$
 תצויה

ממשט ווייטשטראס נובע כי או $U = \emptyset$ או $V = \emptyset$

קובצאות - $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ קטירים

- $X = [0, 2\pi)$, $Y = S^1$, X, Y לא הומומורפים.

הוכחה - נניח בעלייה ש- $x \sim y$, f ההומי.

עכשיו טריק!
 $X' = [0, \pi] \cup (\pi, 2\pi)$ ← ציט קטיר

$f: X' \rightarrow S^1$ ההומי מטופל ושה מוטרי

קטיר $\Leftarrow$ סתירה.