

many folds - יריסות

**הכזרה - מרחק טופולוגי**

אם:

1. לכל נקודה  $x \in X$  קיימת סביבה  $\underbrace{U_x}$  - מינימלית,  $n \geq 1$
2.  $T_2$  (Hausdorff)
3.  $S_p$

(סביבת קוארציטלט)

6. מה - 3 גישות (2), (3) האמיני תלויות ב- (1) ומה הבה.

הוכחה: (א)  $x \in \mathbb{R}^2$  נקח  $\varepsilon = 0.5$ .  
 פלאטם אין סביבה  
 הוואו  $\delta = (\text{אוס} - \mathbb{R}^m)$   
 עמה?

כ"א אב נקד 26 סביבה של (סס). אצ ל - צאטל יס אסחא רכבי קשיות  
אבס צאטל - ג רכבי קשיות  
צאטל - קשור - א צמ  
אס א לא מק"ם את (1)  
(טריק הבאצ'ר!)

$$F: \mathbb{R} \setminus \{0\} \xrightarrow{\text{ad}} \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad -1, \quad Y = \mathbb{R} \cup \mathbb{R} \quad \text{np}$$

$$100 \text{ kg } \mathbb{R} \rightarrow \text{in } \mathbb{R} \uparrow$$

$$: \text{ad } \eta \quad X = Y/F \quad \text{in } \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

ד- י"ס, ס' און אסמכתא זינט, און אין ב'ד'.  
אבער פאר אסמכתא פערטאח וואס איז א מוסר'ס פאר  $S_2$  אבער שטענדיג  $S_2$ .

$S_2$  18 820  $T_2 - 1$  (1) 820 X - 0  
:npj

$$|A| > \kappa_0, \quad \beta \text{ 3rd/4th} \quad X = \bigcup_{\alpha \in A} \mathbb{R}$$

למה זה איש? תמיד.

מרחב וקטורי  $\mathbb{R}^n$  עם בסיס

$S^k, S^i$  - קואפקטיות

א. כיך מוכרים את (1) ארץ ישראל? ארץ ישראל מוכרת שם נקראת, ואלהם אר

מישור יצא . פיתוח ירידה אל מים קטנים .

תכונות של יחידה

זמנה - כל ירידה היא קונטרסט מקומי.

תזר טר כן עכס נקודה  $x \in X$  וסלס סמיאיה  $x \in U$  ק"ממס תס-סמיאיה  $x \in U$

$$d(v) \approx \bar{B}$$

$U_x \approx \mathbb{R}^n$  - הוכחה - נשתדל במציאת קואורדינטות של  $U_x$  על  $x$ .  
 $x \mapsto 0 \in V' \subset \mathbb{R}^n$  -  $U_x$  - סביבה של  $x$  תומי'א'ן' סביבה

$\bar{v} = \varphi^{-1}(\bar{B}_0(\epsilon))$   $v \in \varphi^{-1}(B_0(\epsilon))$  קיים  $N$  כזה ש

# הערה - במסגרת מכר, ספלי יריעה יש קוא פקטי פיקציה חד נקדית  
ה קח'נ אונה בהכרח יריעה!



משפט - מימד של יריעה מוגדר באופן יחיד  
 פירוט:  $\mathbb{R}^n \not\cong \mathbb{R}^m$  עבור  $n \neq m$ .  
 הוכחנו עבור  $n=1$ , וכן.

הוכחה - נדרשים כלים נוספים, לא נראה בקורס הזה. אבל זה נכון

משפט - מכפלה של יריעות היא יריעה -  $\dim X \cdot Y = \dim X + \dim Y$

הוכחה -  $x \in X, y \in Y \implies (x, y) \in X \cdot Y$

$$\begin{array}{c|c} (x, y) \in U_x \times V_y & x \in U_x \subset \mathbb{R}^n, y \in V_y \subset \mathbb{R}^m \\ \hline \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n+m} & \end{array}$$

דוגמאות - טורוס -  $T^2 = S^1 \times S^1$  - יריעה דו-ממדית קומפקטית  
 - גלים -  $S^1 \times \mathbb{R}$

משפט - כל יריעה קטנה מסלית מקומית.  
 כל רכיב קטירות הוא רכיב קטירות מסלית.

הוכחה - תחזרו להצדקה והכל מיד מובן

משפט - אם  $X$  יריעה קומפקטית אזי היא בעלת מס סופי של רכיבי קטירות

הוכחה - תרגיל אלמנטרי-תחטבו.

משפט - כל יריעה היא מורמלית ומטרזבילית

הוכחה - עיני משפט מתקנת יש לבדוק רק רבולטריות.  
 תרגיל.

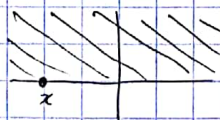
יריעות עם שפה - (manifolds with boundaries)

הגדרה -  $X$  נקרא יריעה  $n$ -ממדית עם שפה אם:

- (1) לכל נקודה  $x \in X$  קיימת סביבה  $U_x \approx \mathbb{R}_+^n$  או  $U_x \approx \mathbb{R}_+^n$ , ויש נקודות שהסביבה
  - (2)  $T_x$
  - (3)  $S_x$
- כאשר  $X$  מתאימה ל- $\{x_1, \dots, x_n \mid x_n \geq 0\}$

נקודות  $x \in X$  עם  $U_x \approx \mathbb{R}_+^n$  נקראות נקודות פנימיות  
 נקודות  $x \in X$  עם  $U_x \approx \mathbb{R}_+^n$  נקראות נקודות שפה

$\partial \mathbb{R}_+^n = \{x \mid x_n = 0\} = \mathbb{R}^{n-1}$   
 ההומיאומורפיזם  $\varphi: U_x \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}_+^n$  הזגת  $x$  שראונוס.



$\mathbb{R}_+^n$  - דוגמאות

$\overline{B^n} = S^{n-1} \cup B^n$  כדור סגור

הגדרה - יריעה קומפקטית עם שפה נקראת יריעה סגורה



משפט -  $R^n, R^m$  אינם הומומורפיזם

הוכחה - לא נכנס זהירות, אבל זה נכון

הסקנה - נקודות פנימיות הן שוליות מנקודות שפה

משפט - יהי  $X$  יריעה  $n$ -מימדית עם שפה,  $X \neq \emptyset$ . אזי:  
 (א)  $X \subset \bar{X}$  תת קבוצה פתוחה מהא יריעה  $n$ -מימדית עלא שפה  
 (ב)  $X \subset \bar{X}$  תת קבוצה שפה יריעה  $(n-1)$ -מימדית עלא שפה

הוכחה - "נ", נוכח אבל זה ממש אלמנטרי. + שוסטין

(א)  $\bar{X}$  יריעה  $n$ -מימדית עלא שפה  
 - דפי הבדלה, פתוחה,  $X \subset \bar{X}$   
 $R^n \approx \bar{X}$  אז עלפ נקודה  $x \in \bar{X}$  זאת גם סביבת קואורדינטות  
 (ב)  $X \subset \bar{X}$  תת קבוצה שפה  
 $R^n \approx \bar{X}$   $x \in \bar{X}$ ,  $\bar{X} \subset \bar{X}$   $(R^n)^{-1} \varphi$  - נקודות שפה

$$X \subset \bar{X} \subset \bar{X} \approx \bar{X} \approx \bar{X} \approx \bar{X}$$

הסקנה - אם  $X$  יריעה  $n$ -מימדית עם שפה,  $X$  קומפקטית, אזי  $X$  יריעה  $(n+1)$ -מימדית סגורה

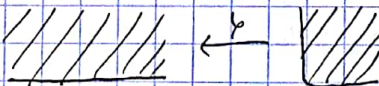
משפט - יהיו  $X, Y$  יריעות עם שפה מימד  $m, n$  בהתאמה.  
 אזי  $X \times Y$  יריעה  $(m+n)$  מימדית עם שפה ומתקיים:  
 $\partial(X \times Y) = (\partial X \times Y) \cup (X \times \partial Y)$

הוכחה -  
 $\bar{X} \times \bar{Y} \subset \bar{X \times Y}$   
 $(x, y) \in X \times Y$   
 (1)  $x \in \partial X$ ,  $y \in Y$   
 (2)  $x \in X$ ,  $y \in \partial Y$   
 (3)  $x \in \partial X$ ,  $y \in \partial Y$

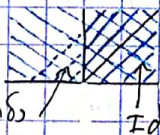
דפד המקרים האלו יש סביבה  $\approx R^{m+n}$   
 (1)  $R^n \times R^m \approx R^{n+m}$   
 (2)  $R^n \times R^m \approx R^{n+m}$   
 (3)  $R^n \times R^m \approx R^{n+m}$

נסביר את (3) - דמה  $R^n \times R^n \approx R^{2n}$  ?

דוגמה אחת זה  $2^2 = 4$  אום מסבכים  
 שם צד ימין כחסי מכובדים



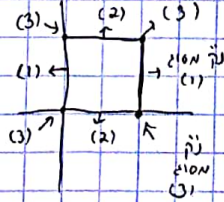
דוגמה יותר כללית:



בהכללה  
 נסתכל בנקודה  $x$  ביר  $X$   
 נסתכל בנקודה  $y$  ביר  $Y$  זה מה הוואו

המקרה הרגיל מימדי  $n$  ושיים אותו דבר

$$I^2 = X \times Y, \quad X = Y = I = [0, 1]$$





משפט - כל יריעה עם שפה מקיימת:

- 1) קומפקטיות מקומית
- 2) קשירה מסילתית מקומית
- 3) טרמטיות ומאזיזיביליות

ממ

יריעות חז מיוחדות

משפט - כל יריעה חז מיוחדת קשירה הומומורפית -

- (א)  $Y$  אם היא סגורה
- (ב)  $R$  אם היא לא קומפקטית - לא שפה
- (ג)  $(\infty, \infty)$  אם היא לא קומפקטית עם שפה
- (ד)  $(0, \infty)$  אם היא קומפקטית עם שפה

למה - תהי  $X$  יריעה חז מיוחדת - לא שפה. סביבות קואריזנטיות. אז:

- 1)  $U_x \cap U_y$  או ריק או קשיר או בעל שני רכיבי קשירות
- 2) קיימת הסתקת שיכון  $\bigcup_{i=1}^n U_i \rightarrow U_x \cup U_y$

הוכחה - (1) נניח  $U = U_x \cap U_y \neq \emptyset$

$U$  פתוחה ב- $U_x$  וב- $U_y$   
א - נניח  $U_x \cup U_y$  או  $U_x \cup U_y$   
אז בהכרח  $U = U_x$  ← רכיב קשירות 1 (כי  $R$  קשיר)  
 $U_x \cong R$

ב - נניח  $U_x \neq U_y$ ,  $U_x \neq U_y$

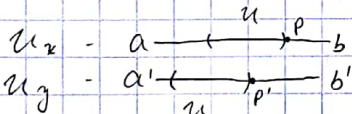
אז  $U \subset U_x \cong (a, b)$   
אז  $U \cong (a, b) \subset U_y$

אם איחדו של קטעים פתוחים  
כל קטע פתוח יכול להיות ~~הבדל~~  $a \xrightarrow{f} b$  באמצע

בקצה  $a \xrightarrow{f} b$

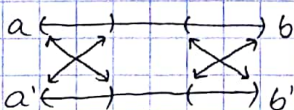
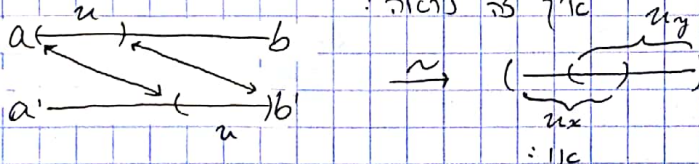
בקצה הסוף  $a \xrightarrow{f} b$

אבל זה בלתי אפשרי מקטע יהיה באמצע, כי זו פתוחה -  $T_2$  הסבר:



$p \neq p'$ , כי  $U_x \cap U_y \neq \emptyset$ , וכל סביבה שלהם מכילה חלק מ- $U$ ,  
לכן החיתוך ~~הוא~~ שש הסביבות לא ריק

לכן יש או רכיב קשירות אחד (צמוד לקצה אחד)  
או שני רכיבי קשירות (צמודים ל שני קצות)  
אז זה נראה:



(2) אם החיתוך ~~הוא~~ או אם רכיב קשירות אחד, יש שיכון -  $R$ , אז  $S' \cong U_x \cup U_y$

הוכחת המשפט (א סגורה)

נניח ש- $X$  סגורה. אז  
הונים את האיחוד האינסופי:  
 $U_i \approx (a_i, b_i)$

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$$

← רכיב 1-  $U_1 \approx (a_1, b_1)$   
← שני רכיבים -  $U_2 \approx S'$

~~המשפט~~  $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$

נוסיף את  $U_3$ , כפי שאנו לבטוח ש- $U_2$  וחיבור להתקיים  $U_3 \approx S'$   
אם  $U_2 \approx S'$ , ואחרת פשוט נקבל קטע ארוך יותר.

~~המשפט~~ בסוף נקבל מרחב ואם קטע ארוך מזדווגת הקומפקטיות.

~~המשפט~~

טענה -  $X$  לא קומפקטית אם שפה  
קיים כיסוי הן מנייה  
כך ש- $U_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset$ ,  $i \geq 1$

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$$

ע"י סביבות קואורדינטות

חברה - תרבות

הוכחת המשפט - ( $X$  לא קומפקטית אם שפה)

$$\mathbb{R} \approx X = \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i), \quad b_1 < b_2 < \dots$$