

אפואליה - הרכאה 1

+ המרה אחר שהתבטל יותר חשוב מההצאות

בוחן אמצ 20.12 11:00

סיכום המועד והאתר - math.tau.ac.il/~shustin/teaching.html

רוב החצות עולות לאתר ולעבודות במיד.

עבודת קצה - א' 16-18 עריכה 11

ספרי סימול - J. Murkzes בספר 7 הקומד

בסוף כל שיור יחיד לאחד נשית טעמים שצרכו.

מה נשאר? - מה זה מרחב אפואלי

- תכונות בסיסיות של מרחבים אפואליים

- דברים אחרים (פתיח) ביד עם המעלה מעניינת

מרחבים אפואליים

1) הבנות

צומחה - $\mathbb{R}$ קבוצת פתוחות - $\mathbb{R}^n$, (a, b) , $(-\infty, b)$, (a, ∞) , $\bigcup_{i \in I} (a_i, b_i)$

הבזרה - תהי $X \neq \emptyset$ קבוצת החזקה.

$2^X \subset \Omega$ אפואליה ב-X אם:

1 - $\emptyset, X \in \Omega$

2 - $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I} \in \Omega \Leftrightarrow \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \in \Omega$ (מצרית לכל איחוד)

3 - $U_1, \dots, U_n \in \Omega \Leftrightarrow \bigcap_{i=1}^n U_i \in \Omega$ (מצרית על חיתוך סופי)

$U \in \Omega$ קבוצה פתוחה

(X, Ω) מקרא מרחב אפואלי.

דוגמאות - X קבוצה כלשהי. $\Omega = \{\emptyset, X\}$ אפואליה אנטי דיסקרטית.

$\Omega = 2^X$ אפואליה דיסקרטית.

X קבוצה כלשהי.

X קבוצה אינסופית.

X קבוצה סופית.

$\Omega = \{\emptyset, X\}$ אפואליה קו פונית (cofinite).

$X = \{a, b\}$: $\Omega = \{\emptyset, \{a, b\}\}$

$X = \{a, b, c\}$: $\Omega = \{\emptyset, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$

$X = \{a, b, c, d\}$: $\Omega = \{\emptyset, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, c, d\}\}$

$X = \{a, b, c, d, e\}$: $\Omega = \{\emptyset, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, e\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{b, e\}, \{c, d\}, \{c, e\}, \{d, e\}, \{a, b, c, d, e\}\}$

הבזרה - תהי $X \neq \emptyset$ קבוצה.

$\Omega' = \Omega \cup \{X\}$ אפואליה ב-X. $\Omega'' = \Omega' \cup \{X\}$ אפואליה ב-X. $\Omega''' = \Omega'' \cup \{X\}$ אפואליה ב-X.

הבזרה - יהי (X, Ω) אפואליה. $\Omega \subset 2^X$ אפואליה. $F \in \Omega$ סגורה.

משפט - קבוצה ת"ק סגורה Δ מקיימת:

$$\begin{aligned} & \text{1) } \emptyset, x \in \Delta \\ & \text{2) } F_1 \dots F_n \in \Delta \Rightarrow F_1 \in \Delta \\ & \text{3) } F_1 \dots F_n \in \Delta \Rightarrow F_1 \in \Delta \end{aligned}$$

קובעה - ק"ס.

משפט - $x \neq \emptyset$ קבוצה. $\Delta \subset 2^x$ מקיים את 1, 2, 3 מהמשפט הקודם. אזי -

$$\Omega = \{x \mid \forall F \in \Delta, x \in F\}$$

הפזרה - יהי (X, Ω) מ"ס. $A \subset X$ ת"ק כלשהי. $u \in \Omega$ אם $u \in \Omega$ מכילה את A (אזי ACu) אזי u סגורה (פתורה) של A .
אם $x \in \Omega$ קבוצה ו- $x \in u$ (זו פתורה) אזי u סגורה של x .

2) בסיס סטופרואוזה

$$\bigcup_{x,r} D_x(r) = \Omega, \mathbb{R}^n \text{ - צומחה}$$

הפזרה - (X, Ω) מרחב סטופרואוזה. $\Sigma \subset \Omega$ ת"ק נקראת בסיס סטופרואוזה אם $\Sigma \neq \emptyset$ כי $\Sigma \subset \Omega$ כאשר $\bigcup_{x \in \Sigma} V_x = \Omega$.
ה"א $\Omega = \bigcup_{x \in \Sigma} V_x$

$$\Sigma = \{D_x(r)\} \text{ , } \Sigma' = \{D_x(r)\} \text{ (כדורים פתוחים)}$$

$$\Sigma = \{D_x(r)\} \text{ , } \Omega = 2^x$$

שאלות - (1) (X, Ω) מ"ס ו- $\Sigma \subset \Omega$ בסיס Σ - Ω .
(2) $x \neq \emptyset$ קבוצה, $\Sigma \subset 2^x$ האם Σ בסיס סטופרואוזה כלשהי?

$$\text{משפט - } \Sigma \subset \Omega \text{ בסיס סטופרואוזה} \Leftrightarrow \{x \in \Sigma\} \cup \{x \in \Omega\} \Rightarrow \{x \in \Sigma\} \cup \{x \in \Omega\}$$

קובעה - תבנית.

משפט - $x \neq \emptyset$ קבוצה, $\Sigma \subset 2^x$ בסיס סטופרואוזה כלשהי. אזי -

$$V(u, w \in \Sigma), V(x \in V \cap W), \{z \in \Sigma\}, [x \in z \subset V \cap W]$$

קובעה $\Leftrightarrow$ בהנחת ש- Σ בסיס נובח את (א), (ב).

$$\begin{aligned} & \text{א - כי } x \text{ פתורה} \\ & \text{ב - } V, w \text{ קבוצות פתורות, אז פתורה של } V \cap W \\ & \text{אם } V, w \text{ קבוצות פתורות, אז } V \cap W \text{ פתורה} \\ & \text{אם } V, w \text{ קבוצות פתורות, אז } V \cap W \text{ פתורה} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ נבדל סטופרואוזה Ω ה- x כך ש- Σ בסיס Ω .

$$\Omega = \{V \cap W \mid V, W \in \Sigma\}$$

נבדוק שזה סטופרואוזה.

1) Ω סגור, $x \in \Omega$ אזי $x \in \Omega$.

2) איחודים קבוצות Ω גם שייכים Ω (אפי רגיוני)

$$\Omega = \bigcup_{x \in \Sigma} V_x, \Omega = \bigcup_{x \in \Sigma} V_x$$

$$\Omega \cap \Omega = (\bigcup_{x \in \Sigma} V_x) \cap (\bigcup_{y \in \Sigma} V_y) = \bigcup_{x,y \in \Sigma} (V_x \cap V_y)$$

$\square$ ומשכך באינדוקציה. Ω סגור.

הבדלה - יהי (X, Ω) מ"ט. $\Sigma \subset \Omega$ במסלול סטוכסטי. Σ כ"ס יקרא בסיס (Prebase) אם:
 $V = \bigcap_{i=1}^{\infty} W_i$, $W_i \in \Sigma$, $W_i \supset W_{i+1}$ חיתוך סופי
 $V \in \Sigma$

דוגמה - X אינסופית, Ω סטוכסטי קו-פיניט. $\Sigma' = \{A \subset X : A \text{ סופי}\}$ בסיס.

שאלה - $X \neq \emptyset$ קבוצה, $\Sigma' \subset \Sigma$ בסיס סטוכסטי פשוט.
 $X = \bigcup_{V \in \Sigma'} V$
 הוכחה - תרגיל.

3) מרחבים מטריים

הבדלה - $X \neq \emptyset$ קבוצה, פונ' $\rho: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ נקראת מטריקה אם:
 (1) $\rho(x, x) = 0$, $\rho(x, y) \geq 0$, סכונק, $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
 (2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
 (3) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ - אי-טריוויה

דוגמאות - (1) $\mathbb{R}^n$ מטריקה אוקלידית $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$

הבדלה - (X, ρ) מרחב מטרי, $x \in X$, $r \in \mathbb{R}^+$
כדור פתוח:
 $D_x(r) = \{y \in X : \rho(x, y) < r\}$

משפט - (X, ρ) מ"ט, $\Sigma = \{D_x(r) : x \in X, r > 0\}$ במסלול סטוכסטי ρ מ"ט.



$X = \bigcup_{x \in X} D_x(1)$ הוכחה - א-ב

$$d = \rho(x, x_2) \leq \rho(x, x_1) + \rho(x_1, x_2) < r_1 + r_2$$

במרחבים סכונק $\rho(x, y) < r_1 + r_2$ אז $\rho(x, y) < r_1 + r_2$
 $\rho(x, y) < r_1 + r_2$ אז $\rho(x, y) < r_1 + r_2$



משקנה - (X, ρ) מ"ט, U פתוח במרחב מטרי ρ .
 $\forall x \in U, \exists r(x) > 0, D_x(r(x)) \subset U$

דוגמה - $\rho(x, y) = \begin{cases} 0 & x=y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$ מגזירה סטוכסטיה דיסקרטית.

הבדלה - (X, Ω) מ"ט. אם קיימת מטריקה ρ ב- X כן $\Sigma = \Omega$ אולי סטוכסטיה.

דוגמה - X קבוצה בת אינסוף $\aleph_1$, אזי סטוכסטיה אולי דיסקרטית אינה מטריבלית.

הערה - מטריקת שונות פסגות מגזירות אותה סטוכסטיה.
 $a \rho_1(x, y) \leq \rho_2(x, y) \leq b \rho_1(x, y)$, $a, b \in \mathbb{R}$
 $\Omega_{\rho_1} = \Omega_{\rho_2}$

4) נ"ך ותתי קבוצות במרחב טופולוגי

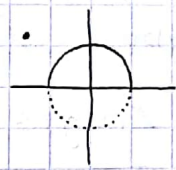
הפזרה - יהי (X, Ω) מרחב טופולוגי, $A \subset X$ נ"ך.

- $x \in A$ נקראת נקודה פנימית של A אם קיימת סביבה U_x כזו ש- $U_x \subset A$.
 $x \in A$ נקראת נקודה חיצונית של A אם קיימת סביבה U_x כזו ש- $U_x \cap A \neq \emptyset$ ו- $U_x \cap A^c \neq \emptyset$.
 $x \in A$ נקראת נקודת שפה של A אם לכל סביבה U_x מתקיים $U_x \cap A \neq \emptyset$ ו- $U_x \cap A^c \neq \emptyset$.
 $(U \setminus A) \neq \emptyset$

טענה - $A \cup \partial A = \text{Int}(A) \cup \text{Int}(A^c) \cup \partial A$ איחוד זר

- הפזרה - 4) $x \in A$ נ"ך גבול אם לכל סביבה U_x מתקיים $U_x \cap A \neq \emptyset$ ו- $U_x \cap A^c \neq \emptyset$.
 5) $x \in A$ נקראת נקודת התכנסות אם לכל סביבה U_x מתקיים $U_x \cap A \neq \emptyset$ ו- $U_x \cap A^c \neq \emptyset$.
 6) $x \in A$ נקראת נקודת מבודדות אם קיימת סביבה U_x כזו ש- $U_x \cap A = \{x\}$.

- נ"ך פנימיות - כל הנ"ל בלעדי הסבה
 נ"ך חיצוניות - כל הנ"ל בלעדי הסבה
 נ"ך שפה - כל הנ"ל בלעדי הסבה
 נ"ך גבול - כל הנ"ל בלעדי הסבה
 נ"ך התכנסות - כל הנ"ל בלעדי הסבה
 נ"ך מבודדות - הנקודה



קבוצה - $\mathbb{R}^2$

- משפט - 1) $\text{Int}(A) \subset A$
 2) $\text{Int}(A)$
 3) $\text{Int}(A)$ הקבוצה הפנימית של A

הוכחה - תרגיל.

משפט - $\text{Int}(A) = A \iff A$ פתוחה

- הפזרה - יהי (X, Ω) מרחב טופולוגי, $A \subset X$ תת קבוצה.
 $\bar{A} = \text{cl}(A)$
 A הוא קבוצת נ"ך ההצטברות של A .

- משפט - 1) $A \subset \bar{A}$
 2) $\bar{A}$ סגורה
 3) $\bar{A}$ הקבוצה הסגורה המינימלית הסגורה של A

הוכחה - תרגיל.

משפט -
 $\bar{A} = \text{Int}(A) \cup \partial A$
 $\bar{A} \setminus \text{Int}(A) = \partial A$
 $\bar{A} \cap \text{Int}(A) = \text{Int}(A)$

קבוצה - $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, $\text{Int}(\mathbb{Q}) = \emptyset$, $\partial \mathbb{Q} = \mathbb{R}$