19/11/18

הרצאה מס' 11 - טופולוגיה

תזכורת - אקסיומות מנייה

C_2 - קיים בסיס בן מנייה

C_1 - קיים בסיס בן מנייה מקומי. (לכל x קיים בסיס-סביבות של x בת מנייה)

ספרביליות - X ספרבילי אם קיימת בה קבוצה בת מנייה וצפופה בו.

נראה כי $C_2 \Rightarrow C_1$.

$C_2 \Rightarrow$ ספרביליות: $U_1, \ldots, U_n, \ldots$ בסיס של טופולוגיה Ω, לפי אינדוקציה נבחר $x_1 \in U_1$, $x_2 \in U_2$, ..., $x_n \in U_n$, ... והטענה היא ש-$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ צפופה ב-X. מה צ"ל צפופה?
שלכל קבוצה פתוחה לא ריקה (חיתוך (לא ריק) עם הקבוצה הצפופה.
תהי $U\in\Omega$ קבוצה פתוחה, $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ בסיס של Ω אז קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש-
$U_n \subset U$ ולכן $x_n \in U$ כלומר $\{x_n\} \cap U \neq \emptyset$ ולכן $\{x_n\}$ צפופה.

הערה- C_1 לא גורר ספרביליות.

טענה - אם X מרחב ספרבילי, $X \in C_1$ אז $X \in C_2$. (טענה לא נכונה)

הוכחה - X ספרבילי, יש קבוצה בת מנייה וצפופה. כלומר, קיימת סדרה $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ צפופה ב-X. בנוסף, X מקיים אקסיומת C_1, כלומר ל-x_1 יש בסיס של סביבות של x_1 (נסמני כ- $\{U_{1,n}\}$ ולכל x_k יש בסיס סביבות $\{U_{k,n}\}_n$ בסיס סביבות של x_k. ונראה ש- $\{U_{k,n}\}_{k=1,n=1}^{\infty\ \infty}$ בסיס של טופולוגיה. צריך לבדוק שלכל קבוצה פתוחה יש בפנים הקבוצה מהבסיס. תהי $\emptyset \neq U \in \Omega$, כיוון ש- $\{x_n\}$ צפופה, קיים $k\in\mathbb{N}$ כך ש $x_k \in U$, U היא סביבה של x_k ו- $\{U_{k,n}\}_n$ בסיס סביבות של x_k ולכן קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש- $U_{k,n} \subset U$. צריך לבדוק שבסיס האיחוד נותן את כל X - [illegible]

טענה - מרחב מטרי הוא C_1.

הוכחה - $x \in X$ $B_{\frac{1}{n}}(x)$ ...

טענה - X מטרי ספרבילי אז הוא C_2

הוכחה - $\bigcup_{r\in\mathbb{Q}_+}\bigcup_k B_r(x_k)$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n(x_1) = X$.

טענה - $\Omega \subset \Omega'$ טופולוגיות על X, אם X ספרבילי לפי Ω' אז (X,Ω) ספרבילי.

הוכחה - ברור.

הערה- C_2, C_1 לא נכון הטענה ההפוכה.

דוגמה- (נתבונן כאשר $\mathbb{R}$ עם טופולוגיה רגילה וטופולוגיה קו-סופית.
ל- $\mathbb{R}$ עם טופולוגיה רגילה יש בסיס סביבות בן מנייה. נניח כי- $0\in U_n$
כאשר U_n בטופולוגיה קו-סופית, ונקבל $(\cap U_n)^c = \bigcup_n (U_n)^c$
אז קיימת $z\notin (\cap U_n)^c$ ולכן $\bigcap_n U_n \not\subset \{z\}^c$.
כלומר מראים שבסיס הסביבות לא בן מנייה ולכן טופולוגיה קו-סופית לא מקיימת אקסיומת C_1.

טענה- X ספרבילי $f\in C(X,Y)$ אז $f(X)$ ספרבילי.
הוכחה- $\{x_n\}$ צפופה ב- X אז $\{f(x_n)\}$ צפופה ב- $f(X)$.

משפט Lindelöf $(X,\Omega)\in C_2$, $U_\alpha\in\Omega$, $\alpha\in A$ ו- $\bigcup_{\alpha\in A}U_\alpha = X$
אז קיים תת כיסוי בן מנייה של X, כלומר קיימת $A_0\subset A$, $|A_0|\le\aleph_0$
ו- $\bigcup_{\alpha\in A_0}U_\alpha = X$.

הוכחה. $(X,\Omega)\in C_2$, כלומר קיים בסיס של טופולוגיה Ω בן מנייה, $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ נסמנו.
נגדיר $M:=\{n\in\mathbb{N}\mid \exists\alpha\in A\ V_n\subset U_\alpha\}$. לכל $n\in M$ (נבחר לפי אקסיומת הבחירה) α_n כך ש-
$V_n\subset U_{\alpha_n}$. (נוכיח) $\bigcup_{n\in M}U_{\alpha_n}=X$, יהי $x\in X$ מאחר ש- $X=\bigcup_{\alpha\in A}U_\alpha$ אז קיים
$\alpha\in A$ כך ש- $x\in U_\alpha$, $\{V_n\}$ בסיס ולכן קיים $k\in M$ ולכן $x\in V_k\subset U_{\alpha_k}$
ולכן $x\in\bigcup_{n\in M}U_{\alpha_n}$.

הגדרה של התכנסות- $x_n\to x$ אם לכל סביבה U של x קיים N כך שלכל $n\ge N$
$x_n\in U$.

הגדרה- $\forall A\subset X$ (X,Ω) סגור סדרתי של A, זה הקבוצה של הגבולות של סדרות מאיברים
מ- A. מסומן ב- $S.cl(A)$.

טענה- אם $X\in C_1$ אז $S.cl(A)=\bar{A}$.
הוכחה- אם $\{x_n\}\subset A$ ו- $x_n\to x$ אז $x\in\bar{A}$. (x נק' הצטברות) $S.cl(A)\subset\bar{A}$.
כיוון שני- יהי $x\in\bar{A}$ $\Rightarrow$ לכל $x\in U\in\Omega$ $U\cap A\neq\emptyset$. מאחר ש- $(X,\Omega)\in C_1$ קיימת