

14/11/18

הצגה 10 - פונקציות

1. פונקציות - הגדרה

$f \in C(X, \mathbb{R})$ היא פונקציה רציפה, $A \cap B = \emptyset$, $A, B \subset X$, (T_1) ו- (T_2)

כך, $f|_A = 0$, $f|_B = 1$

עבור $p, q \in \mathbb{R}$, $p < q$, $U_p \subset F_p$ ו- $U_q \subset F_q$ ו- $U_p \cap U_q = \emptyset$ ו- $U_p \cup U_q = F$

$U_p = X$ ו- $U_q = \emptyset$ ו- $p < q$ ו- $U_p \subset F_p \subset U_q \subset F_q$

$f(x) = \inf \{ p \mid x \in U_p \}$ ו- $f(x) = \sup \{ p \mid x \in U_p \}$

והינה פונקציה רציפה ו- $f|_A = 0$ ו- $f|_B = 1$

$f \in C[0, 1]$ ו- $f(0) = 0$ ו- $f(1) = 1$

והינה פונקציה רציפה ו- $f(x) \geq p$ ו- $x \in U_p$ ו- $f(x) < p$ ו- $x \notin U_p$

והינה פונקציה רציפה ו- $f(x) < q$ ו- $x \in U_q$ ו- $f(x) \geq q$ ו- $x \notin U_q$

והינה פונקציה רציפה ו- $f(x) \in \mathbb{R}$ ו- $x \in U_p$ ו- $f(x) \in \mathbb{R}$ ו- $x \notin U_p$

$\left(\frac{f}{a} \right) \in \left(\frac{f}{b} \right)$

$\forall x \in X, a < p < f(x) < q < b$

$V := U_q \cap F_p \subset F_q \cap U_p$

והינה פונקציה רציפה

$f(z) \in (a, b)$, $z \in V$ ו- $f(z) \in (a, b)$ ו- $z \in V$

$x_0 \in V$

$f(z) < q < b$ ו- $z \in F_q$ ו- $z \in V$

$f(z) > p > a$ ו- $z \in U_p$ ו- $z \in V$

$x_0 \in U_q$ ו- $f(x_0) < q$

$x_0 \in U_q \cap F_p = V$ ו- $x_0 \in F_p$ ו- $f(x_0) > p$

והינה פונקציה רציפה

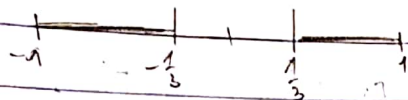
Tietze Lemma

$f \in C(A, \mathbb{R})$ ו- $A \subset X$ ו- (T_1) ו- (T_2)

$g|_A = f$ ו- $g \in C(X, \mathbb{R})$

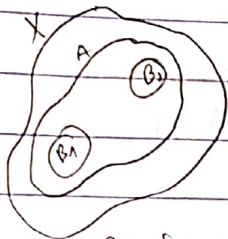
הוכחה - נבנה פונקציה רציפה g ו- $g|_A = f$

והינה פונקציה רציפה ו- $g|_A = f$



$$B_1 = f^{-1}([-1, \frac{1}{3}]) \quad \text{-- צהוב}$$

$$B_2 = f^{-1}([\frac{1}{3}, 1])$$



$B_1 \cap B_2 = \emptyset$, וזכור כי f היא פונקציה חד-חד-ערכית, קיימת פונקציה

$\varphi|_{B_2} = 1, \varphi|_{B_1} = 0$ - ע. כן, $\varphi \in C(X, [0, 1])$

$$g_1|_{B_2} = \frac{2}{3}, g_1|_{B_1} = -\frac{1}{3}, g_1(x) \in [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}] \text{ וכן } g_1 = \frac{2}{3}(\varphi(x) - \frac{1}{2}) \quad \text{צהוב}$$

ואם $|f(x) - g_1(x)| \leq \frac{2}{3}$ (ובגלל $x \in A$ יכולים להיות 3 מקרים, אולם לא נזכר)

כעת, נבחר $f_1 = \frac{3}{2}(f - g_1)$ מוגדרת על A , נזכר. ψ קיימת פונקציה f_1

$f \in C(A, [-1, 1])$ וכן ψ נבחרת על X , כי הוגדרו שני טורים $|\psi| \leq \frac{1}{3}, |f_1 - \psi| \leq \frac{2}{3}$

קיים ψ כן, $\psi \in C(X, [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}])$ - ע. כן, $\frac{2}{3} \geq |f(x) - \psi(x)| \quad \forall x \in A$ קיימת פונקציה

אם ψ סומך, נא $\psi = g_1$ פונקציה חד-חד-ערכית.

אם $f_1 \in C(A, [-1, 1])$ וכן $f_1 = \frac{3}{2}(f - g_1)$ מוגדרת על A , נזכר. ψ קיימת פונקציה

$\forall x \in A \quad |f_1 - \psi_1| \leq \frac{2}{3}$ - ע. כן, $\psi_1 \in C(X, [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}])$ וכן ψ_1 קיימת פונקציה

$$|f - g_1 - g_2| = |\frac{2}{3}(f_1 - \psi_1)| \leq (\frac{2}{3})^2 \text{ וכן } g_2 = \frac{2}{3}\psi_1 \quad \text{צהוב, נזכר } g_2 \text{ (ע"י נוסחה)}$$

כעת, נבחר $f_2 = \frac{3}{2}(f - g_1 - g_2)$ מוגדרת על A , נזכר. ψ_2 קיימת פונקציה $|f_2 - \psi_2| \leq \frac{2}{3}$

$$|f - g_1 - g_2 - g_3| = |\frac{2}{3}(f_2 - \psi_2)| \leq (\frac{2}{3})^3 \text{ וכן } |g_3| \leq (\frac{2}{3})^2 \cdot \frac{1}{3}, g_3 = (\frac{2}{3})^2 \psi_2, |f_2 - \psi_2| \leq \frac{2}{3}$$

אנחנו נראה שהאינדוקציה נכונה, נבחר $g_k \in C(X, \mathbb{R})$ וכן $|g_k| \leq (\frac{2}{3})^{k-1}$

אנחנו נראה שהאינדוקציה נכונה, נבחר $g_k \in C(X, \mathbb{R})$ וכן $|g_k| \leq (\frac{2}{3})^{k-1}$ וכן $|f - \sum_{k=1}^n g_k| \leq (\frac{2}{3})^n$

$$g_k|_A = f, \text{ אנחנו נראה שהאינדוקציה נכונה, נבחר } g_k \in C(X, \mathbb{R}) \text{ וכן } g = \sum_{k=1}^{\infty} g_k$$

$$|g(x)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |g_k(x)| \leq \frac{1}{3} (1 + \frac{2}{3} + (\frac{2}{3})^2 + \dots) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 1, \quad x \in X \text{ נזכר}$$

אנחנו

טענה 1: אם $f \in C([0, 1], \mathbb{R}^2)$ אז f היא פונקציה חד-חד-ערכית.

(מקובל לומר)

$$C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1], \quad C_2 = [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \quad \text{קבוצה קטנה}$$

$$\psi_1 \in C(C_1, \mathbb{R}), \quad \psi_2 \in C(C_2, \mathbb{R}), \quad \psi_3 \in C(C_3, \mathbb{R}), \quad \psi_4 \in C(C_4, \mathbb{R}), \quad \dots$$

אנחנו
נראה
ש

אנחנו נראה שהאינדוקציה נכונה, נבחר $g_k \in C(X, \mathbb{R})$ וכן $|g_k| \leq (\frac{2}{3})^{k-1}$

אנחנו נראה שהאינדוקציה נכונה, נבחר $g_k \in C(X, \mathbb{R})$ וכן $|g_k| \leq (\frac{2}{3})^{k-1}$

$$C = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k, \quad \text{אם } C \neq \emptyset, \text{ אז } f \in C(C, \mathbb{R})$$

כס, נגדור $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)}{2^k}$ שם $\varphi \in C(C, \mathbb{R})$ ו- φ מוגדרת על ידי

$[0,1]$ כי כל נק' מ- $[0,1]$ יכול לכתוב בצורה $0.a_1a_2a_3\dots$ תכונה המכונה

היא למשל, כל איבר ב- $[0,1]^2$ (וגם ב- $[0,1]$) ניתן לכתוב בצורה $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{-k} \varphi_k(x)}{2^k}$

וגם $f \in C(C, \mathbb{R}^2)$, $f(x) = (\varphi(x), \psi(x))$

וגם $\tilde{f} \in C([0,1], \mathbb{R})$ Tietze Extension Theorem, $[0,1]^2$ על f

$\tilde{f}|_C = \varphi$ ו- $\tilde{f} \in C([0,1], \mathbb{R})$ ו- $\tilde{f}|_C = \psi$ וגם $\tilde{f}(x) = (\tilde{\varphi}(x), \tilde{\psi}(x))$

$G: [0,1] \rightarrow [0,1] \times [0,1]$ ו- $G|_C = f$ ו- G היא פונקציה.

אקסיומות מנייה

הצגה-1 (א) $(X, \mathcal{U})$ אם קיים סיס B של $\mathcal{U}$ מנייה.

(ב) עקרון קיום סיס מנייה. כל X קומה סדרה של קבוצות

פגומה $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \dots, \mathcal{U}_n, \dots$ כן, לכל סביבה V של x קיים n כך ש-

$U_n \subset V$, זה הצגה-2, $(X, \mathcal{U})$ C_1

(ג) $(X, \mathcal{U})$ ספרימטום קומה ACX מנייה וצבירה X -

למה: $C_2 \Rightarrow C_1$ (מיוקד - גרמני)

הוכחה: אם $X \in C_2$ אז C_1 C_2 C_1

הערה: (מגדל לטני C_2 על $V \in \mathcal{U}$ אם $\mathcal{U}$ צבירה של סופולוזה $\mathcal{U}$ - X

(אגור $\tilde{V} = V \cap \mathcal{U}$ אז $\mathcal{U}$ סדרה של סופולוזה משתנה אז האוסף $\{\tilde{V}\}$

מנייה סיס סופולוזה משתנה $\mathcal{U}$ - X , לומר $V \cap \mathcal{U} \subset V \cap \mathcal{U}$ סיס מנייה של $\mathcal{U}$

ובכן לטני C_2

צמצום - ספרימטיום על צמצום מנייה

(א) אם $|X| > 1$ ו- $\mathcal{U} = 2^X$ אז $(X, \mathcal{U})$ ספרימטיום.

(אגור $\mathcal{U} = \mathcal{U} \cup \mathcal{U}$ (אוספים נק' בלתי) ו- $\mathcal{U}$ סופולוזה של $\mathcal{U}$ או $\mathcal{U} = \mathcal{U}$ $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}$

זה למשל שאסופולוזה אחרת $\mathcal{U}$ הוא ספרימטיום $\mathcal{U} = \mathcal{U}$ $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}$ ספרימטיום

ו- $X \subset \mathcal{U}$ סופולוזה $\mathcal{U}$ - X ו- $\mathcal{U}$ ספרימטיום