

5/11/18

הכנה מֵ 16

משפט - (X, Ω) מרחב טופולוגי $K \subset X$ קומפקטי $f \in C(X, \mathbb{R})$ אז קיימים

$$a = \min_{x \in K} f(x)$$

$$b = \max_{x \in K} f(x)$$

הוכחה - $f(K) \subset \mathbb{R}$, תמונה של קומפקטי (על) קומפקטי. $\mathbb{R}$ הוא מרחב מטרני ולכן $f(K)$ סגורה ומסומה.

$$a, b \in f(K), -\infty < a := \inf_{x \in K} f(x) \leq \sup_{x \in K} f(x) := b < \infty$$

$f(K) = [a, b]$ קטורה של $f(K)$

הערה - (1) מרחב (X, Ω) נקרא קומפקטי מטרני (לוקאלי) אם לכל $x \in X$ קיימת סביבה $U \subset \mathbb{R}$ כך ש $\bar{U}$ קומפקטי.

(2) (X, Ω_x) , (Y, Ω_y) מרחב טופולוגי טאנג (Y, Ω_y) קומפקטי, $f \in C(X, Y)$.

(f, y) נקרא קומפלטיות של (X, Ω) אם:

(א) f הומומורפיזם קו $x \mapsto f(x)$

$$f(\bar{x}) = y \quad (ב)$$

(ג) (y, Ω_y) קומפקטי

משפט - $(X, \Omega) \in T_2$ קומפקטי מטרני אם קיימת קומפלטיות $x \mapsto y$ כך ש $1 = |y|/|f(x)|$

$$y \in T_2$$

הוכחה - $y = X \cup \{w\}$ ונניח $w \notin X$ $\Omega_y = \Omega_x \cup \{ \{w\} \cup V \mid V \subset X, X \text{ קומפקטית} \}$
 ונניח $f(x) = x$ לכל $x \in X$.

נראה כי Ω_y טופולוגיה - כאמור נראה כי Ω_y נפתח: ניקח $u \in \Omega_y$ $\bar{u} \subset \Omega_y$
 $A'' = \{ \alpha \mid w \in u_\alpha \}, A' = \{ \alpha \mid u_\alpha \subset X \}$ (נסמן)

$$u' = \bigcup_{\alpha \in A'} u_\alpha \in \Omega_x$$

נראה כי $\alpha \in A''$ ולכן קיימת K קומפקטית כך $u_\alpha = [X|K] \cup \{w\}$ לכל $\alpha \in A''$ קיימת

$$u_\alpha = \{w\} \cup (X|K_\alpha) \quad K_\alpha = X|u_\alpha \text{ קומפקטית כך } u_\alpha = \{w\} \cup (X|K_\alpha)$$

$$u'' = \bigcap_{\alpha \in A''} K_\alpha \subset K_\alpha \text{ סגורה ולכן קומפקטית}$$

$$X|(u' \cup u'') \subset X|u'' \text{ ויש סגורה כלילית}$$

$$v_1 \cap v_2 = v_1 \cap (v_2 \cap X) \subset \Omega_x$$

סגורה כלילית: $v_1, v_2 \in \Omega_y$ $v_1 \cap v_2 \subset X$ $v_1, v_2 \in \Omega_y$ sk

$$(X|(v_1 \cap v_2)) = (X|v_1) \cup (X|v_2) \text{ ומקיים } w \in v_1, w \in v_2$$

נראה כי y קומפקטית -

$$u_\alpha \subset \Omega_y \leftarrow y = \bigcup u_\alpha \text{ ויש } u_\alpha \text{ ונראה כי } u_\alpha \text{ נפתח}$$

$$K \subset \bigcup_{\alpha \in A} (u_\alpha \cap X) \text{ קיימת } K \subset \bigcup_{\alpha \in A} (u_\alpha \cap X) \text{ קיימת } K \subset \bigcup_{\alpha \in A} (u_\alpha \cap X)$$

$$y = \bigcup_{j=0}^{\infty} u_{\alpha_j} \text{ ויש } u_{\alpha_j} \text{ ויש } u_{\alpha_j}$$

$$K^c \in \Omega_x \text{ ולכן } u \cap X \in \Omega_x, f^{-1}(u) = u \cap X \text{ ויש } f(x) = x$$

$$f^{-1}(v) = v \in \Omega_y \text{ ויש } v \in \Omega_y$$

$$x \leftarrow \text{כל קומפקטית (אחרי קומפקטיות) אכן } x \text{ נפתח}$$

$$u \cap X = \emptyset, X|K = \emptyset \text{ ויש } u = \{w\} \cup [X|K]$$

$$u \cap X = \emptyset, X|K = \emptyset \text{ ויש } u = \{w\} \cup [X|K]$$

$$u \cap v = \emptyset, w \in u, x \in v \text{ ויש } u, v \in \Omega_y$$

$$u = w \cup (X|\bar{v}) \in \Omega_y \text{ ויש } \bar{v} \subset X \text{ ויש } x \in v \subset \Omega_x$$

$$u \cap v = \emptyset \text{ ויש } u, v \in \Omega_y$$

מכאן של מרחבים טופולוגיים

$$z = x \times y, (y, \Omega_y), (x, \Omega_x) \text{ מרחבים טופולוגיים}$$

$$\{ u \times v \mid u \in \Omega_x, v \in \Omega_y \}$$

$$(u_1 \times v_1) \cap (u_2 \times v_2) = (u_1 \cap u_2) \times (v_1 \cap v_2) \text{ ויש } u_1, v_1, u_2, v_2$$

$$x \times y \sim y \times x \text{ (א) ויש } x, y$$

$$x \times (y \times z) = (x \times y) \times z \text{ (ב) ויש } x, y, z$$

$$B = \{ u \times v \mid u \in \Omega_x, v \in \Omega_y \} \text{ ויש } B \text{ ויש } B$$

נניח כי $B \rightarrow A$ היא פונקציה. $u \times (v \times w) \in \Omega_{x \times y \times z}$ $sk \vee x \times w \in \Omega_{y \times z}$
 $z_0 \in A \subset \Omega_{x \times y \times z}$ סתירה. $z_0 = (a, b, c) \in X \times (y \times z)$ $B \subset \Omega_{x \times y \times z}$
 $a \in U, u \in X$ קיימים. $z_0 \in B \subset A$ $z_0 \in B \subset A$ $z_0 \in B \subset A$ $z_0 \in B \subset A$
 $w \in \Omega_z, v \in \Omega_y$ קיימים $u \times c \in A, (b, c) \in C \subset \Omega_{y \times z}, (b, c) \in C$ $c \in \Omega_{y \times z}$
 $(a, b, c) \in U \times V \times W \subset A$ $sk \vee (b, c) \in V \times W \subset C$ $c \in \Omega_{y \times z}$

סתירה - $A \times B \subset X \times y$ $sk \vee B \subset y$ $A \subset X$ סתירה.
 סתירה - $\Omega_{x \times y}$ סתירה כי X סתירה וסתירה B סתירה $(X \times B^c \in \Omega_{x \times y})$
 $A^c \times y \in \Omega_{x \times y}$ כי $A^c \times y$ סתירה

$$(A \times B)^c = \underbrace{(A^c \times y)}_{\text{סתירה}} \cup \underbrace{(X \times B^c)}_{\text{סתירה}}$$

סתירה כי $A \times B$ סתירה

$$\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B} \quad \text{סתירה}$$

$$(x, y) \rightarrow y \quad \Pi_y: X \times y \rightarrow y, \quad (x, y) \rightarrow x \quad \Pi_x: X \times y \rightarrow X$$

סתירה כי $\Pi_y \in C(x \times y, y), \Pi_x \in C(x \times y, x)$

$$G = \{(x, y) \in X \times y \mid f(x) = y\} \quad f \in C(x, y)$$

$$\Pi_x|_G: G \rightarrow X \quad \text{הסתירה}$$

נניח, $\Pi_x|_G \in C(G, X)$ $\Pi_x|_G$ סתירה כי $\Pi_x|_G$ סתירה $\Pi_x|_G$ סתירה $\Pi_x|_G$ סתירה
 $b = f(a)$ $a \in X$ $\Pi_x|_G$ סתירה $\Pi_x|_G$ סתירה $\Pi_x|_G$ סתירה $\Pi_x|_G$ סתירה

$$\varphi(u) \in V_0 \quad \text{כי} \quad a \in U \subset \Omega_x \quad \text{כי} \quad \varphi(a) = (a, b) \in V_0 \in \Omega_G$$

$$V_0 = V \cap G \quad \text{כי} \quad V \in \Omega_{x \times y} \quad \text{כי} \quad V \in \Omega_G$$

$$(a, b) \in A \times B \subset V \quad \text{כי} \quad B \in \Omega_y, A \in \Omega_x \quad \text{כי} \quad (a, b) \in V \in \Omega_{x \times y}$$

$$x \in A \quad \text{כי} \quad x \in U \quad \text{כי} \quad a \in A \cap f^{-1}(B) \in \Omega_x \quad a \in A, a \in f^{-1}(B) \in \Omega_x \quad \text{כי} \quad f \in C(x, y)$$

$$f(x) \in B \quad \text{כי} \quad x \in U \quad \text{כי} \quad f(x) \in B$$

$$\varphi(x) \in V_0 \quad \text{כי} \quad \varphi(x) \in G, \quad \varphi(x) \in A \times B \subset V$$

$$f(x) = b \quad \text{כי} \quad \Pi_x|_G: G \rightarrow X \quad \text{כי} \quad \Pi_x|_G$$