הרצאה מס' 15

משפט - אם $(X,\Omega)\in C_2$ ו-X קומפקטית סדרתית אז X קומפקטית

הוכחה - נניח $X=\bigcup_{\alpha\in A} V_\alpha$ כיסוי של X. ממשפט lindelof קיים תת כיסוי בן מנייה, נסמן אותו $\{V_i\}_{i=1}^{\infty}$

אז $X=\bigcup_{k=1}^{\infty} V_k$. נניח בשלילה שאין תת כיסוי סופי, אפשר להניח בה"כ כי

$$V_2\setminus V_1\neq\phi$$

$$V_2\setminus(V_1\cup V_3)\neq\phi$$

$$V_n\setminus\left(\bigcup_1^{n-1}V_j\right)\neq\phi$$

אחרת יכולנו להוריד את ה-V הרלוונטי. נבחר סדרת איברים $x_n\in V_n\setminus\left(\bigcup_1^{n-1}V_j\right)$ בגלל ש-X קומפקטית סדרתית אז $\exists y\in X$ ותת סדרה של $\{x_n\}$ כך ש- $x_{n_k}\to y$

$$y\in X\Rightarrow y\in\bigcup_1^{\infty}V_k\Rightarrow \exists N\in\mathbb{N}\ \ y\in V_N$$

ולכן מהגדרת התכנסות סדרה ב-V_N יש אינסוף מאיברי הסדרה x_{n_k} שהם אינסוף מאיברי x_n אז זאת סתירה לבנייה של V_N, לפיה ב-V_N יש לכל היותר N מאיברי x_n

טענה- (X,ρ) מרחב מטרי קומפקטי סדרתי, $\forall \varepsilon>0$ קיימים $x_1,\dots,x_N\in X$ כך ש $X=\bigcup_{k=1}^{N} B_\varepsilon(x_k)$

הוכחה- נניח בשלילה שזה לא נכון אז נבחר $x_1\in X$ שרירותי. כדור סביבו לא מכסה את X אז נבחר $x_2\in X\setminus B_\varepsilon(x_1)\neq\emptyset$ באותו אופן ניתן לבחור $\emptyset\neq x_3\in X\setminus B_\varepsilon(x_2)$ ובאופן כללי $x_n\in X\setminus B_\varepsilon(x_{n-1})$

כלומר $\rho(x_1,x_2)>\varepsilon$, $\rho(x_2,x_3)>\varepsilon$, $\varepsilon<\rho(x_k,x_n)$ $\forall k\neq n$

לכן בסדרה זו אין תת סדרה מתכנסת- בסתירה.

מסקנה- אם (X,ρ) מרחב מטרי קומפקטי סדרתי, אז הוא ספרבילי.

הוכחה- לכל $k\in\mathbb{N}$ קיימת קבוצה $F_k\subset X$ סופית כך ש $X=\bigcup_{x\in F_k}B_{1/k}(x)$ בנוסף נסמן $F=\bigcup_{1}^{\infty}F_k$ היא קבוצה צפופה, נראה זאת- לכל $x\in X$ $x\in U\in\Omega$ סביבה.

קיים $B_\varepsilon(x)\subset U$ אז קיים k כך ש $B_{1/k}(x)\in U$ $\Leftarrow$ $X=\bigcup_{y\in F_k}B_{1/k}(y)$

$\Leftarrow$ לכן קיים $a\in F_k$ כך ש $x\in B_{1/k}(a)$ $\Leftarrow$ $\rho(x,a)<1/k<\varepsilon$ $\Leftarrow$ $a\in B_{1/k}(x)\subset U$ $\Leftarrow$ F צפופה.

מסקנה- אם (X,ρ) מרחב מטרי קומפקטי סדרתי, אז הוא קומפקטי

דוגמא למרחב סגור וחסום שהוא לא קומפקטי - תהי X קבוצה אינסופית כלשהי עם מטריקה:

$\rho(x,y)=1$ $\forall x\neq y\in X$ אז X סגורה וחסומה (המרחק תמיד 1) מתקיים כי $X=\bigcup_{x\in X}B_{1/2}(x)$

ואין לו תת כיסוי סופי.