

28/11/18

הכנסה מס' 14

902

הפונקציה (x, Ω) נקראת קונפטיבית אם לכל כיסוי פתוח של $X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ קיים תת כיסוי סופי
 $X = \bigcup_{\alpha \in \Delta} U_\alpha$ כזה ש- $|\Delta| < \infty$

הפונקציה קבוצה $K \subset X$ (x, Ω) נקראת קונפטיבית אם (K, Ω_K) מכתה קונפטיבית כאשר Ω_K מושיגת מ- Ω
 כלומר לכל כיסוי פתוח של K , $U_\alpha \in \Omega_K$, $K \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ קיים תת כיסוי סופי.
 באופן כללי $A = \{ \emptyset, 1, 1/2, \dots, 1/n, \dots \}$ קונפטיבית אך מנגד $B = A \setminus \{ \emptyset \}$ אינה קונפטיבית.
 לכל נקודה $x \in B$ יש ε_m כך ש- $\phi = (1/k - \varepsilon_k, 1/k + \varepsilon_k) \cap (1/m - \varepsilon_m, 1/m + \varepsilon_m)$ $k \neq m$
 איננו קבוצה סגורה ולכן קבוצה פתוחה אך לא תת כיסוי סופי.

הלמטה של הניתוח - $[0,1] \subset \mathbb{R}$ קונפטיבית

הוכחה - נניח U_α כיסוי $[0,1] \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ $U_\alpha \in \Omega$ נציג קבוצה $E = \{ x \in [0,1] \mid \exists \text{ סדרה } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ כזו ש- } x_n \in U_{\alpha_n} \text{ ו- } x_n \rightarrow x \}$
 נאמר משפט כי $E \neq \emptyset$ כי $0 \in E$ כי $\{0\} = [0,0]$ קונפטיבית ויש $\alpha \in A$ כך ש- $0 \in U_\alpha$ וזה כיסוי
 סופי של $E \neq \emptyset$ נציג $a = \sup X$ $x \in E$ נניח כי $a < 1$ (אחרת סיימנו), קבלנו ש- U_α מכסה
 את $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ קיים α_1 כך ש- $a \in U_{\alpha_1}$, $a \in U_{\alpha_1} \in \Omega$, U_α פתוחה אם קיים $\varepsilon > 0$ כך ש-
 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset U_{\alpha_1}$, $b \in E$ (כי אם $x < a$ אז $x \in U_{\alpha_1}$ מכיוון ש- $a = \max\{a-\varepsilon/2, 0\}$ $[0,x]$
 $[0,x]$ מכסה ε מספר סופי של קבוצות U_α ויש $b \in E$ $[0,b] \subset [0,x] \cup [a-\varepsilon, b]$ אז $b \in E$
 ולכן מתקיים $b \in E$ נקרא סדרה למעלה a של $a=1$ ולכן $\exists \alpha_2$ $1 \in U_{\alpha_2}$
 מהפונקציה $E = [0, 1-\varepsilon/2]$ מכסה ε מספר סופי של קבוצות U_α $|\Delta| < \infty$ ולכן נקרא
 $[0,1] \subset \bigcup_{\alpha \in \Delta} U_\alpha$ וזהו קונפטיבית.

משפט - (x, Ω) מכתה סופית, $K \subset X$ קונפטיבית, $f \in C(X, Y)$ אז $f(K)$ קונפטיבית $y \in Y$
 הוכחה - נסמן $A = f(K)$ ונניח כי $V_\alpha \in \Omega_Y$ מקיפות $A \subset \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha$ נציג $U_\alpha = f^{-1}(V_\alpha) \in \Omega_X$
 $K = f^{-1}(A) \subset f^{-1}(\bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$
 קבלנו ש- K קונפטיבית קיטור $\Delta \subset A$ סופי כך ש- $K \subset \bigcup_{\alpha \in \Delta} U_\alpha$ ויש $f(K) \subset \bigcup_{\alpha \in \Delta} V_\alpha$

מסקנה - x, y הומוטופיים אם X קונפטיבית $\Leftrightarrow Y$ קונפטיבית
 מסקנה - כל קטע סגור ב- $\mathbb{R}$ קונפטיבית

משפט - נניח כי X מכתה קונפטיבית, $A \subset X$ קבוצה סגורה אז A קונפטיבית
 הוכחה - נניח כי $U_\alpha \in \Omega$, $A \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ I כי קיים תת כיסוי סופי. A סגורה ולכן $V = X \setminus A$ פתוחה
 נסתכל $X = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \cup V$ כיסוי פתוח של X לכן יש תת כיסוי סופי $(X$ קונפטיבית)
 $\leftarrow$ קיטור $|\Delta| < \infty$ $\Delta \subset I$ כך ש- $X = \bigcup_{\alpha \in \Delta} U_\alpha \cup V$, V סגור A לכן מתקיים

$$A = \bigcap_{\alpha \in \Delta} A_{\alpha} = \left(\bigcap_{\alpha \in \Delta} A_{\alpha} \right) \cup \left(\bigcap_{\alpha \in \Delta} A_{\alpha} \cup U_{\alpha} \right) \subset \bigcup_{\alpha \in \Delta} U_{\alpha}$$

משפט: $\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha = \emptyset$ ורק $\{F_\alpha\}_{\alpha \in A}$ נכנסת לסדרה פולגה $\Leftrightarrow$ קיים (x, R) - נגד.

$$\bigcap_{\Delta \in A} \Delta F_{\Delta} = \emptyset \quad \text{e.g. } |\Delta| < \infty, \Delta \subset A$$

הוכחה - ניקח $U_\alpha = X/F_\alpha$ $\alpha \in \mathbb{N}$ ויש חתך סוסוי סופי $\Leftarrow$ משלים (החיבור בין

$\bigcap_{\alpha \in \Delta} F_\alpha \neq \emptyset$ כי קיים Δ כגון $|\Delta| < \infty$, $\Delta \subset A$ $\{F_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ $\{F_\alpha\}_{\alpha \in A}$ $\{F_\alpha\}_{\alpha \in A} \Leftarrow \text{קבוצת } (X, \mathcal{F}) \rightarrow \text{פונקטור}$

10. $\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha \neq \emptyset$ (הנוגתה דומה למעשה הקודמת)

$K = \mathbb{R}$ sic: wegen $K \subset X$ 1. Beispiel (X, Ω) -Gegen

(2) $V_x^{(g)} \cap U_y^{(x)} = \emptyset$, $y \in U_y^{(x)} \in \Omega$, $x \in V_x^{(g)} \in \Omega$ פנימי $\forall y \in K$, $\forall x \notin K \rightarrow$ נכון

$$K C U y^{(u)} \quad \Delta K \quad | \Delta | < \infty \quad \text{...} \quad K C U y^{(u)} \quad \text{...} \quad K$$

מתקין כו

$$(\#) \bigcap_{y \in \Delta} V_x^{(y)} \cap \bigcup_{z \in \Delta} U_z^{(x)} = \bigcup_{z \in \Delta} \bigcap_{y \in \Delta} V_x^{(y)} \cap U_z^{(x)} = \emptyset$$

$$V = \prod_{y \in A} V_x^y \quad \text{SK}$$

لـ $U \cap V$, $k \in U$ نعلم $U = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} U_j$ ($x \in U_j$ $\forall j \in \mathbb{N}$) $x \in V \in \Omega$, $(*) \Rightarrow \forall V \cap K = \emptyset$

6000

$$\forall x \in X \setminus K \quad \exists V_x, x \in V_x \subseteq \Omega \quad V_x \cap K = \emptyset$$

רשמה על $V = \bigcup V_x$ $x \in X$ כזה ש $V \cap K = \emptyset$ $V \cap V_x \neq \emptyset$ $V \cap V_x \neq \emptyset$ $V \cap V_x \neq \emptyset$

דוגמה: $K \subseteq V = X/K \subseteq X/K \subseteq V$

תכנית-לפניות כי עבור $k_1, k_2 \in (x, \infty)$ וכל $(x, \infty) \in T_2$ קיים $u, v \in \Omega$ כך $u \cap v = \emptyset$

$k_2 CV, k_1 Cu$

אנחנו מעריך המאותה מובחן אל המשפט הבא -

אם $K \subset X$ (X, Ω) מרחב טופולוגי K קומפקטי ו $X \neq K$ אז קיימים $U, V \in \Omega$ כך ש $U \cap V = \emptyset$

.XeU, KCV

לכן $p_k \in X$ קונברג' והאלמנט $x \in X$ כזה:

משפט - (x, y) מרחק קוסייני (y, x) מרחק האוסמל. נניח כי $x \rightarrow y$ זרימה חתך 15

הומומורפיזם בין X ו- $f(X)$

נוכחתי - $f(x) = 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $\rightarrow$ $f^{-1}(1) = \mathbb{R}$ $\rightarrow$ $f^{-1}(1)$ איננה סגורה $\rightarrow$ f איננה סגורה

$f(F)$ על $f = (f^{-1})^{-1} \in C(X, Y)$ (המשקל ההפוך) קומפקט $F \Leftarrow$ סגור $F \subset X$, קומפקט X

קומפקטיות ואינסוף $f(F)$ סגורה.

קומפקטיות ספירה - תצורה - מרחב (X, Ω) הוא קומפקטי - סגור אם לכל סדרה $(x_n) \subset X$ קיימת תת סדרה מתכנסת. (לפי נוסח (X, Ω))

תצורה - קבוצה $A \subset X$ היא קומפקטית ספירה אם (A, Ω_A) הוא מרחב קומפקטי - סגור.

משפט - נניח כי $(X, \Omega) \in \mathcal{C}$ ו- $K \subset X$ קומפקטית אז K קומפקטית ספירה.
 תוכחה - נניח $(x_n) \subset K$ (סדרה) קיים $y \in K$ כך שלכל $y \in U \in \Omega$ $\# \{n | x_n \in U\} = \infty$
 נניח בשלילה שזה לא נכון, כלומר לכל $y \in K$ קיימת סביבה $U_y \in \Omega$ כך ש- $\# \{n | x_n \in U_y\} < \infty$
 $K \subset \bigcup_{y \in K} U_y$, $K \subset \bigcup_{y \in K} U_y$ קיימת $\Delta \subset K$ כך ש- $|\Delta| < \infty$ וכל $y \in \Delta$ $U_y \cap K \neq \emptyset$
 $N = \{n | x_n \in \Delta\} \subset \{n | x_n \in \bigcup_{y \in \Delta} U_y\} = \bigcup_{y \in \Delta} \{n | x_n \in U_y\}$
 (איתור סופי של קבוצה סופית - לפי סופיות) וזה בסתירה לפעם - N אינסופי.
 לפי קיים $y \in U$, $U \in \Omega$.

$x \in \mathcal{C}$ לפי קיימת סדרה סגורה של y שמתאם בסים של הסדרה שלה - $u_1, u_2, \dots$ ונניח סדרה
 $x_{n_2} \in U_2 \quad \exists n_2 > n_1 \iff \# \{n | x_n \in U_2\} = \infty, x_{n_1} \in U_1$ כן, $x_{n_1} \in U_1$ ו- $U_1 \supset U_2 \supset U_3 \dots$
 $x_{n_k} \in U_k$ ו- $n_1 < n_2 < \dots$ נקבל האינדוקציה סדרה x_{n_k} כך ש-

נבדוק כי $x_{n_k} \rightarrow y$ כלומר נרצה סביבה U של y קיים N כך ש- $x_{n_k} \in U_k \subset U$, $y \in U_k \subset U$