

27/2/19

משפט צפוטס: תהי L/K הרחבה חזקה של שדה מספרים, עם חבור גלואה G .

אז, אם $C \subseteq G$ מתקנה צמצום,

$$\delta(\{O_K - \text{שטח } P \mid \left(\frac{L/K}{P}\right) = C\}) \sim \frac{|C|}{|G|}$$

(קראו מסופר, δ - צפיפות שטחים בהמשך, יש שני סוגים והמשפט נכון גם להם)
[המשפט]

תצפיות: מתקנה הצמצום מתחלקת לסתמים היא $\left\{ \left(\frac{L/K}{P}\right) \mid P \in \text{spec } O_K \right\}$, כאשר $\left(\frac{L/K}{P}\right)$ הוא

אלבר פרוקטורס המוצג כפ ש -

$$\left(\frac{L/K}{P}\right) \chi \equiv \chi^{N_P} \pmod{P}$$

כאשר $N_P = \# O_{K/P}$

(נצייר עכשיו χ והצפיפות $\rightarrow$ משפט צפוטס - הרצאה 2)

הצגה: (צפיפות ציריולה)

אם הצבול ק"מ (נצייר - עבור $A = \text{spec } O_K$ - נצייר - עבור $A = \text{spec } O_K$)

$$\delta_D(A) = \lim_{s \rightarrow 1} \frac{\sum_{P \in A} |N_P|^{-s}}{\sum_{P \in \text{spec } O_K} |N_P|^{-s}}$$

הצגה: (צפיפות סתמים)

אם הצבול ק"מ, (נצייר - שזר, עבור $A = \text{spec } O_K$ - נצייר - עבור $A = \text{spec } O_K$)

$$\delta_N = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\#\{P \in A \mid N_P \leq x\}}{\#\{P \mid N_P \leq x\}}$$

ניתן להבין (נראה בהמשך) שאם הצפיפות הצמצום קיימת, אז גם צפיפות ציריולה קיימת (להיפך לא נכון). מאחר המשפט נכון לשני סוגי הצפיפות אז נובע אלו הם הצפיפות ציריולה.

בזמנה: $L = \mathbb{Q}(\zeta_n)$, $K = \mathbb{Q}$. אז $\mathbb{Q} \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$, ואז, $\left(\frac{L/\mathbb{Q}}{P}\right) = p \pmod{n}$, כאשר,

$$\{p \mid \left(\frac{L/\mathbb{Q}}{P}\right) = p \pmod{n}\} = \{p \mid p \equiv a \pmod{n}\}, \quad a \pmod{n} \text{ מספר}$$

נעזר במסקנת הצפוטס שם אנחנו בוטלים p כפ $p \equiv a \pmod{n}$, ואז a (משפט ציריולה)

$$\#\{p \leq x \mid p \equiv a \pmod{n}\} = \frac{x}{n} + O\left(\frac{x}{n^2}\right)$$

צריכים פונקציה L של ציריולה כדי להוכיח המשפט. ניקח $\chi: (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ קרקטר נרחב אלו להצגה.

$$\chi(a) = \begin{cases} \pi(a \bmod n), & \gcd(a, n) = 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}, \quad \text{Re}(s) > 1 - \delta \approx 3/4$$
$$L(s, \chi) = \sum_{n \geq 1} \frac{\chi(n)}{n^s} = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{\pi(\mathcal{P})^{e_i}}{\pi(p_i)^{e_i}} = \prod_p (1 - \frac{\chi(p)}{p^{s+1}})^{-1}$$

דוגמה: $\chi(n) = \begin{cases} 1, & n \equiv 1 \pmod{4} \\ 0, & \text{onk} \end{cases}$

$$\eta(a) \sum_{\chi} \chi(a) = \sum_{\chi} \eta \chi(a) = \sum_{\chi} \chi(a) \Rightarrow \sum \chi(a) = 0$$
$$\begin{aligned} \#\{p \leq x \mid p \equiv a \pmod{n}\} &= \sum_{p \leq x} \mathbb{1}_{\{p \equiv a \pmod{n}\}} = \sum_{p \leq x} \cdot \frac{1}{\#\mathbb{Z}_n^*} \sum_{\bar{a}} \chi(p \bar{a}) = \\ &= \frac{1}{\#\mathbb{Z}_n^*} \sum_{\bar{a}} \chi(\bar{a}) \sum_{p \leq x} \chi(p) = \frac{1}{\varphi(n)} \cdot \#\{p \leq x\} + \sum_{\chi \neq \chi_0} \chi(\bar{a}) \left(\sum_{p \leq x} \chi(p) \right) \end{aligned}$$

אם L/K אגלית, אז ציב'ק רשמי תורה "כמו צמ"א"ם", שזה Ray Class Groups.
 אם 'היה הנשג הישן. קיבלו אז ציב'ק קצת שגור שגור (ש 'היה
 הנשג הנשג). Ray Class Group נקרא פקציה L -שגור הקרה. נשג צמ"א"ם
 "רשמי" אז מנוקציה L של אגלית, שגור אגלית פירוק צמ"א"ם, מנוקציה אגלית.
 וזו נשג'ה ל-הנשג'ה של מנוקציה אגלית.

תאריך:

Janusz -

Serre, Local Fields -

Fried - Jordan, Field Arithmetic -

(Complete Fields) $\mathbb{R}, \mathbb{Q}$ ו- $\mathbb{C}$

הערות:

יהי K שדה מלא, Γ חבורת המסדרים של K . נניח $\varphi < \psi$ ו- ψ הוא מסדר רציונלי. אז $\Gamma = \mathbb{Z}$ ו- $\Gamma \cong \mathbb{R}$.
 הגדרה: המסדר v של K הוא מסדר רציונלי, $v: K \rightarrow \Gamma \cup \{\infty\}$, כך ש- $v(a) = \infty$ אם ורק אם $a = 0$.

רציונלי, $\varphi < \psi$

$$v(ab) = v(a) + v(b) \quad (1)$$

$$v(a+b) \geq \min(v(a), v(b)) \quad (2)$$

$$v(a) = \infty \Leftrightarrow a = 0 \quad (3)$$

$$v(a) \neq \infty \Leftrightarrow a \neq 0 \quad (4)$$

תכונות נוספות:

$$a \in K \text{ כך } v(1) = 0, v(-a) = v(a) \quad (5)$$

$$v(a+b) = \min(v(a), v(b)) \text{ אם } v(a) \neq v(b) \quad (6)$$

הגדרה: (K, v) שדה מלא עם מסדר v . $\Gamma_v = v(K^*)$. Γ_v חבורת המסדרים של K^* .

$$\mathcal{O}_v = \{x \in K \mid v(x) \geq 0\} \quad \text{החבורה המלאה של } K \text{ עם מסדר } v.$$

אם v מסדר מלא, אז $\mathcal{O}_v$ הוא חבורת המסדרים של K עם מסדר v .

$$v(x) = 0 \Rightarrow v\left(\frac{1}{x}\right) = -v(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{x} \in \mathcal{O}_v$$

אם p ראשוני, אז $\mathcal{O}_p$ הוא חבורת המסדרים של K עם מסדר p .

$$\mathcal{K}_v = \mathcal{O}_v / \mathcal{M}_v \quad \text{השדה המלא של } K \text{ עם מסדר } v.$$

אם $K = \mathbb{Q}$ ו- v מסדר ראשוני, אז $\mathcal{K}_v = \mathbb{F}_p$.

אם $K = \mathbb{C}$ ו- v מסדר מלא, אז $\mathcal{K}_v = \mathbb{C}$.

אם $K = \mathbb{Q}$ ו- v מסדר ראשוני, אז $\mathcal{K}_v = \mathbb{F}_p$.

$$\mathbb{Z} \hookrightarrow \frac{1}{2}\mathbb{Z} \hookrightarrow \frac{1}{4}\mathbb{Z} \hookrightarrow \dots \hookrightarrow \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$$



$$v(x) = (1, 1) \\ v(y) = (1, 0) \\ v(xy) = 0$$

הערות: $\mathcal{O}(x, y)$, $\mathcal{K}(x, y)$

הצגה: נאמר ש- u_1, u_2 שייכים ל- $f: \Gamma_{u_1} \rightarrow \Gamma_{u_2}$ איזומורפיזם של חבורות
אם ורק אם $f(u_1) = u_2$.

הצגה: תת חבורה K של G נקראת חבורת העצירה של G אם $x \in K$ או $x \in G$.

למשל: אם G חבורה, אז G חבורת העצירה.

הוכחה: אם $x \in K$ אז $x^{-1} \in K$ כי $x \in G$ ו- $x^{-1} \in G$.

חבורת העצירה היא תת חבורה של G וכל איבריה נקראים איברי העצירה.

$$K = \{x \in G \mid x^{-1} \in G\} = G - G^*$$

בסיס חבורת העצירה של G (כנס של משתנים)

הכנס G אינו חבורה. לדוגמה: $x \in G$, $y \in G$, $xy \in G$, $yx \in G$, $x^{-1} \in G$, $y^{-1} \in G$.

אם $x \in G$, $y \in G$, $xy \in G$, $yx \in G$, $x^{-1} \in G$, $y^{-1} \in G$.

$$xy = (1 + \frac{x}{y})y \in G$$

למשל: אם $G \subseteq K$ חבורת העצירה, אז קיימת חבורה H של G כזו ש- $G = H$.

הוכחה: נגדיר $\Gamma = K^*/G^*$, חבורה כפולית. (שני איברים, שני)

$$xG^* \leq yG^* \Leftrightarrow \frac{y}{x} \in G^*$$

אם G חבורה אז G חבורת העצירה. הערה: המשפט.

$\Gamma: K^* \rightarrow \Gamma$ היא חבורה של Γ ש- $\Gamma = \infty$ חבורה של Γ .

$$xG^* \leq yG^* \Leftrightarrow \frac{y}{x} \in G^* \Leftrightarrow 1 + \frac{y}{x} \in G^*$$

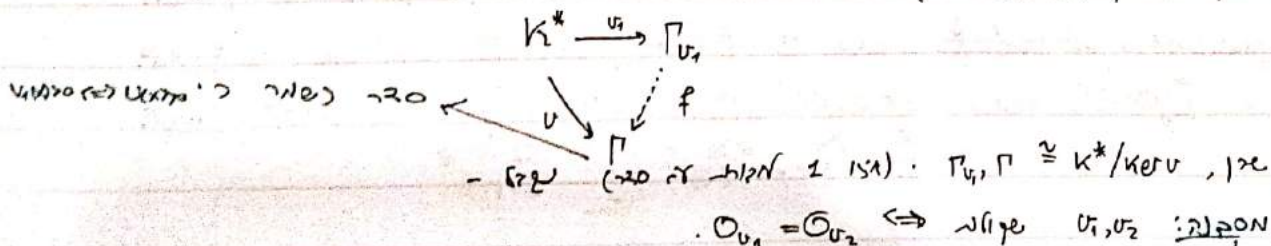
$$xG^* = (x+y)G^*$$

אז Γ חבורה של Γ ש- $\Gamma = \infty$ חבורה של Γ .

אם G חבורה אז G חבורת העצירה. (אכן, נכון)

$$\ker u_1 = \{x \in K^* \mid u_1(x) = 0\} = G^* = \ker u$$

אז Γ חבורה של Γ ש- $\Gamma = \infty$ חבורה של Γ .



משפט (הערך הממוצע) - הערך הנמוך והגבוה של פונקציה רציפה על $\Gamma \subseteq \mathbb{R}$.

הערך u נקרא צפיפות (כצפי) אם $\Gamma_0 \cong \mathbb{Z}$.

טענה: Γ הוא חתך $\Leftrightarrow \Gamma = \Gamma_0$, Γ הערכה קבוצה.

הוכחה: בזה לחיני שנכריח שהערך Γ הוא Γ_0 . נניח $\Gamma \neq \Gamma_0$, אז $\Gamma \cap \Gamma_0 = \emptyset$.

ואז $\Gamma \cap \Gamma_0 = \emptyset$ הרי $\Gamma \cap \Gamma_0 = \emptyset$ (א) $\Gamma \cap \Gamma_0 = \emptyset$.

□

ערך ממוצע

הצגה: ערך ממוצע Γ של פונקציה $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ הוא Γ -

$$(1) |f(x)| = |f(y)|$$

$$(2) |f(x) + f(y)| \leq |f(x)| + |f(y)|$$

$$(3) |f(x)| \geq 0, |f(x)| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

ערך ממוצע נקרא טריבונל אם $|f(x)| = 1$ לכל $x \neq 0$ (זהו מטריבונל).

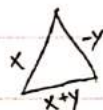
כל f (הטריבונל) (הטריבונל).

נראה ש- $|f(x)| = 1$ הוא טריבונל או טריבונל אם $f(x) = 1$ או $f(x) = -1$.

התנאי החלקי "א",

$$(1') |f(x)| \leq \max\{|f(x)|, |f(y)|\}$$

זה אומר שכל משולש הוא שווה שוקים -



אם $|f(x)| \neq |f(y)|$ אז $|f(x+y)| = \max\{|f(x)|, |f(y)|\}$.

אם $|f(x)| = |f(y)|$ אז $|f(x+y)| = |f(x)| = |f(y)|$, כלומר $|f(x+y)| = |f(x)| = |f(y)|$.

$$(4) |f(x)| \neq |f(y)| \Rightarrow |f(x+y)| = \max\{|f(x)|, |f(y)|\}$$

סופיים. אם $|f(x)| = |f(y)|$ אז $|f(x+y)| = |f(x)| = |f(y)|$.

אז $|f(x+y)| = |f(x)| = |f(y)|$ כלומר $|f(x+y)| = |f(x)| = |f(y)|$.

שני ערכי ממוצע של f הם $|f(x)|$ ו- $|f(y)|$; אם קורה לאחד

$$|f(x)| < 1 \Leftrightarrow |f(y)| < 1, x, y \in \mathbb{R}$$

טענה: $|f(x)| = |f(y)|$ שני ערכי ממוצע של f הם $|f(x)|$ ו- $|f(y)|$.

הוכחה: ניקח $x, y \in \mathbb{R}$ ש- $|f(x)| > 1$ (יש כי $|f(x)| > 1$ לפי ההנחה).

$$\alpha = \log |f(x)| / \log |f(y)|$$

כלומר $\alpha = \log |f(x)| / \log |f(y)|$.

נניח $x, y \in \mathbb{R}$ ש- $|f(x)| = |f(y)|$. נניח $|f(x)| = |f(y)| = b$ ו- $b < 1$.

נניח $b < 1$ (אם $b = 1$ אז $|f(x)| = |f(y)| = 1$).

$$|f(x)| = |f(y)| = b < 1$$

$$\Rightarrow \left| \frac{f(x)}{f(y)} \right| < 1$$

משפט הנורמה, נניח α_i ו- β_i הם מספרים

$$\left| \frac{x_i}{y_i} \right|_2 < 1$$

אז $|x|_2 < |y|_2^{\frac{\alpha_i}{\beta_i}}$, כלומר

$$|x|_2 \leq |y|_2^b$$

אם $\frac{\alpha_i}{\beta_i} < b$ אז $|x|_2 < |y|_2^b$

$$|x|_2 \geq |y|_2^b$$

כלומר $|x|_2 = |y|_2^b$

□

$$|x|_2 = |y|_2^b = |y|_1^{ab} = |x|_1^a$$