

25/12/18

הרצאה 8

משפט: כמו בטכניק של פאן, יהי -

$$e_i = e(\mathcal{B}_i / \mathcal{P}), f_i = f(\mathcal{B}_i / \mathcal{P}), n = [L : K]$$

(1) משפט פאן

$$\sum_{i=1}^g e_i f_i = \dim_{K(\mathcal{P})} \mathcal{O}_L / \mathcal{P} \mathcal{O}_L$$

(2) משפט

$$\sum e_i f_i \leq n$$

(3) $\mathcal{O}_{K, \mathcal{P}}$ הוא $\mathcal{O}_{L, \mathcal{M}}$ כאשר $\mathcal{M} = \mathcal{O}_{K, \mathcal{P}}$ ו- $\mathcal{P}$ הוא אידיאל ראשוני של $\mathcal{O}_{K, \mathcal{P}}$

$$\sum_{i=1}^g e_i f_i = n$$

הוכחה: נשתמש בהשקפה הישירה, הישיר, $\mathcal{O}_L / \mathcal{P} \mathcal{O}_L \cong \bigoplus_{i=1}^g \mathcal{O}_L / \mathcal{P}_i^{e_i}$, הישיר, $\mathcal{P}$ אידיאל ראשוני של $\mathcal{O}_L$

$$\dim_{K(\mathcal{P})} (\mathcal{O}_L / \mathcal{P}_i^{e_i}) = e_i f_i$$

כעת נראה ש-

$$\mathcal{O}_L / \mathcal{P}_i^{e_i} = \bigoplus_{a=0}^{e_i-1} \mathcal{B}_i^a / \mathcal{B}_i^{a+1}$$

$$\mathcal{B}_i^a / \mathcal{B}_i^{a+2} \rightarrow \mathcal{B}_i^a / \mathcal{B}_i^{a+1}$$

$$\mathcal{B}_i^{a+1} / \mathcal{B}_i^{a+2}$$

הוא

$$\mathcal{B}_i^a / \mathcal{B}_i^{a+2} \cong \mathcal{B}_i^{a+1} / \mathcal{B}_i^{a+2} \oplus \mathcal{B}_i^a / \mathcal{B}_i^{a+1}$$

ונראה שהמשפט הוא (3)

$$1 = \dim_{K(\mathcal{P})} (\mathcal{B}_i^a / \mathcal{B}_i^{a+1}) - \dim_{K(\mathcal{P})} (\mathcal{B}_i^a / \mathcal{B}_i^{a+2})$$

$$\dim_{K(\mathcal{P})} (\mathcal{B}_i^a / \mathcal{B}_i^{a+1}) = f_i$$

$$\mathcal{O}_{L, \mathcal{B}_i} / \mathcal{B}_i^b \mathcal{O}_{L, \mathcal{B}_i} \cong \mathcal{O}_{L, \mathcal{B}_i} / \mathcal{B}_i^b$$

$$\mathcal{B}_i^a / \mathcal{B}_i^{a+1}$$

$$\dim_{K(\mathcal{P})} \mathcal{O}_L / \mathcal{P} \mathcal{O}_L \leq n$$

נניח ש- $\mathcal{O}_{L, \mathcal{M}}$ הוא $\mathcal{O}_{K, \mathcal{P}}$ ו- $\mathcal{P}$ אידיאל ראשוני של $\mathcal{O}_{K, \mathcal{P}}$

$$p \mathcal{O}_{L, \mu} = \bigoplus_{i=1}^n p \mathcal{O}_{K, \mu} \chi_i$$

□. Beweis - $\dim_{\mathbb{Q}_K, \mu/p} (G_L/pG_L) = n$, p.f.

Ques: p-0 nlu is given - $p(0) = \beta$ ①

32 p-e 211

משפט: תהי $L/\mathbb{K}$ הרחבה — רצויה, p איננו כוללן של $\mathbb{K}$

השני עולה לרמת ϵ של p ו- σ של p ו- σ של p

$g = [G: D]$
 $f = [D: I]$
 $e = [I: I]$

הוכחה: נסתכל פונקציה γ מה שזו תחילת ה'2' של p , k_1 ,
 G — $O(1)$ — טריבויטל — $O(\log n)$, המינימל — n

חלפה (נכונה) היות $\mathbb{Q}/\mathbb{P}$ חלפה $\mathbb{Q}/\mathbb{P}$ חלפה $\mathbb{Q}/\mathbb{P}$ חלפה
 ואין לה נקודה (צד) $S \in \Sigma$, $\mathbb{P}$ חלפה $\mathbb{Q}/\mathbb{P}$ חלפה $\mathbb{Q}/\mathbb{P}$ חלפה
 זה $\mathbb{Q}$ חלפה $\mathbb{Q}/\mathbb{P}$ חלפה $\mathbb{Q}/\mathbb{P}$ חלפה $\mathbb{Q}/\mathbb{P}$ חלפה
 אכן $g = |S| = |\mathbb{Q} : \mathbb{P}|$

ממש, $\mathbb{Q}/\mathbb{P}$ חלפה - חלפה $\mathbb{Q}/\mathbb{P}$ חלפה $\mathbb{Q}/\mathbb{P}$ חלפה $\mathbb{Q}/\mathbb{P}$ חלפה
 כעת, $f = |\mathbb{D} : \mathbb{I}|$ חלפה $\mathbb{Q}/\mathbb{P}$ חלפה $\mathbb{Q}/\mathbb{P}$ חלפה $\mathbb{Q}/\mathbb{P}$ חלפה
 שג"ע:

$$f(S\mathbb{P}/\mathbb{P}) = |\mathbb{D}_{S\mathbb{P}} : \mathbb{I}_{S\mathbb{P}}| = |\mathbb{D}_S : \mathbb{I}_S| = f$$

כדי אס"ע, נשתמש בהם שני חלפות L/L^I חלפה L/L^I חלפה
 חלפה $\mathbb{P}^I = \mathbb{P} \cap L^I$, $\mathbb{P}$ חלפה $\mathbb{P}^I$ חלפה $\mathbb{P}^I$ חלפה $\mathbb{P}^I$ חלפה
 $\text{Gal}(L/L^I) = \mathbb{D}_{\mathbb{P}/\mathbb{P}^I} = \mathbb{I}_{\mathbb{P}/\mathbb{P}^I}$

חלפה $\mathbb{P}$ חלפה $\mathbb{P}$ חלפה $\mathbb{P}$ חלפה $\mathbb{P}$ חלפה $\mathbb{P}$ חלפה $\mathbb{P}$ חלפה
 צדקה 'חלפה' 1 , $\mathbb{P}$ חלפה $\mathbb{P}$ חלפה $\mathbb{P}$ חלפה $\mathbb{P}$ חלפה $\mathbb{P}$ חלפה
 נכון $\mathbb{P}$ חלפה $\mathbb{P}$ חלפה $\mathbb{P}$ חלפה $\mathbb{P}$ חלפה $\mathbb{P}$ חלפה $\mathbb{P}$ חלפה
 $\mathbb{G}$ חלפה $\mathbb{P}$ חלפה $\mathbb{P}$ חלפה $\mathbb{P}$ חלפה $\mathbb{P}$ חלפה $\mathbb{P}$ חלפה

הצדקה: נאמר $\mathbb{P}$ חלפה $\mathbb{P}$ חלפה $\mathbb{P}$ חלפה $\mathbb{P}$ חלפה $\mathbb{P}$ חלפה $\mathbb{P}$ חלפה
 $e = f = 1$, $g = n$ חלפה $\mathbb{P}$ חלפה $\mathbb{P}$ חלפה $\mathbb{P}$ חלפה $\mathbb{P}$ חלפה $\mathbb{P}$ חלפה
 $f = n$, $e = g = 1$ חלפה $\mathbb{P}$ חלפה $\mathbb{P}$ חלפה $\mathbb{P}$ חלפה $\mathbb{P}$ חלפה $\mathbb{P}$ חלפה
 $e = n$, $f = g = 1$ חלפה $\mathbb{P}$ חלפה $\mathbb{P}$ חלפה $\mathbb{P}$ חלפה $\mathbb{P}$ חלפה $\mathbb{P}$ חלפה

מסקנה: חלפות L/L^I חלפה L/L^I חלפה L/L^I חלפה L/L^I חלפה
 L/L^I חלפה L/L^I חלפה L/L^I חלפה L/L^I חלפה L/L^I חלפה
 L/L^I חלפה L/L^I חלפה L/L^I חלפה L/L^I חלפה L/L^I חלפה

כדי חלפה L/L^I חלפה L/L^I חלפה L/L^I חלפה L/L^I חלפה
 צדקה $\mathbb{P}$ חלפה $\mathbb{P}$ חלפה $\mathbb{P}$ חלפה $\mathbb{P}$ חלפה $\mathbb{P}$ חלפה $\mathbb{P}$ חלפה

הצדקה: נאמר $\mathbb{P}$ חלפה $\mathbb{P}$ חלפה $\mathbb{P}$ חלפה $\mathbb{P}$ חלפה $\mathbb{P}$ חלפה $\mathbb{P}$ חלפה
 $e = f = 1$, $g = n$ חלפה $\mathbb{P}$ חלפה $\mathbb{P}$ חלפה $\mathbb{P}$ חלפה $\mathbb{P}$ חלפה $\mathbb{P}$ חלפה
 $f = n$, $e = g = 1$ חלפה $\mathbb{P}$ חלפה $\mathbb{P}$ חלפה $\mathbb{P}$ חלפה $\mathbb{P}$ חלפה $\mathbb{P}$ חלפה
 $e = n$, $f = g = 1$ חלפה $\mathbb{P}$ חלפה $\mathbb{P}$ חלפה $\mathbb{P}$ חלפה $\mathbb{P}$ חלפה $\mathbb{P}$ חלפה

כדי לקבל את היסודות (כלי) $T(x)$ (על $T(x)$)
 הנצטרך: יהי $x_1, \dots, x_n \in L$, הוסיפו $x_1, \dots, x_n$ ל- K

$$\Delta(x) = \det(T(x_i, x_j))_{i,j} \in K$$

אם $\Delta(x) \neq 0$ אז $x_1, \dots, x_n$ הם בסיס

הנצטרך: אילו הוסיפו מחדש את L

$$\Delta = \Delta(L/K) = \{ \Delta(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in L, x_1, \dots, x_n \text{ בסיס } K \}$$

למה: יהי $S \subseteq K$ קבוצה של K , אז

$$\Delta(L_S/K_S) = \Delta(L/K) \cap K_S$$

הוכחה - נניח $\Delta(L/K) \cap K_S$ ונראה $\Delta(L_S/K_S)$

נניח $y = (y_1, \dots, y_n) \in \Delta(L/K) \cap K_S$, אז $y_i \in L_S$ ו- $y_i \in K_S$ (כי $y \in K_S$)

אז $y_i \in L_S$ ו- $y_i \in K_S$ (כי $y \in K_S$)

$$\Delta(y) = \det(T(y_i, y_j)) = S^n \det(T(y_i, y_j)) = S^n \Delta(y)$$

אם $\Delta(y) \neq 0$ אז $y_1, \dots, y_n$ הם בסיס

אם $\Delta(y) = 0$ אז $y_1, \dots, y_n$ אינם בסיס

אם $\Delta(y) \neq 0$ אז $y_1, \dots, y_n$ הם בסיס

אם $\Delta(y) = 0$ אז $y_1, \dots, y_n$ אינם בסיס

$$\Delta(L/K) = \Delta(x) \cap K$$

הוכחה - נניח $y = (y_1, \dots, y_n) \in \Delta(L/K)$

אז $y_i \in L$ ו- $y_i \in K$ (כי $y \in K$)

אז $y_i \in L$ ו- $y_i \in K$ (כי $y \in K$)

אז $y_i \in L$ ו- $y_i \in K$ (כי $y \in K$)

$$(T(y_i, y_j))_{i,j} = A (T(x_i, x_j))_{i,j} A^T$$

$$\Delta(y) = \det A^2 \Delta(x) \in \Delta(K) \cap K$$