

ממ"מ $|x|$, $u = \alpha v$, אם $u \in L \cap U_{(u)}$ נ"ל
 $-u \in L$

ישל $cu \in L$ נ"ל $-u \in L$, אז $u \in L$
 $cu = xu$, $\forall x \in R$

$$x = u + y, u \in \mathbb{Z}, y \in (0, 1)$$

$$L \ni u - uu = yu \Rightarrow y = 0$$

$\downarrow$
 $-u \in L$

כבר, קבוצה של סעיפים.
 קבוצה של סעיפים: $\text{span } L \neq V$ אז $\text{span } L \neq V$ אז L סגורה
 L סגורה $u_1, \dots, u_{n-1} \in L$ נ"ל

$$L_0 = L \cap V_0, V_0 = Rv_1 + \dots + Rv_{n-1} - (u_n)$$

$$u_1, \dots, u_{n-1}, L_0 = \sum u_1 + \dots + \sum u_{n-1} \quad L_0 \text{ סגורה}$$

$$\lambda = \sum_{i=1}^{n-1} r_i u_i + r_n u_n \in L \quad \text{כאשר } r_i \in R, r_n \in R$$

$r_i = 0 \quad (1 \leq i \leq n-1) \quad r_n = 1$

$$\square \quad L \text{ סגורה} \quad u_1, \dots, u_{n-1}, \lambda$$

12. (המשפט)

V מ"מ R סגור, R סגור, n סגור, L סגור
 (L, B) סגור: $L \cap B \neq \emptyset \Leftrightarrow |L \cap B| < \infty$

המשפט: קבוצה X סגורה V סגורה L סגורה
 $x, y \in X$ סגורה L סגורה $x, y \in X$ סגורה
 $\frac{x+y}{2} \in X$ סגורה L סגורה $x, y \in X$ סגורה

וזה, קבוצה קבוצה סגורה L סגורה $x, y \in X$ סגורה
 המשפט: L סגורה $x, y \in X$ סגורה L סגורה
 $\text{Vol}(X) \geq \text{Vol}(L)$ סגורה L סגורה $x, y \in X$ סגורה

המשפט: T סגורה L סגורה T סגורה
 $T \subseteq V$ סגורה T סגורה T סגורה
 $\text{Vol}(T) \leq \text{Vol}(L)$ סגורה T סגורה T סגורה
 $\phi \neq \lambda + T$ סגורה T סגורה T סגורה

ע"ג, $y \mapsto y+T$ פ"ה, $\lambda \in T \cap Y \neq \emptyset \Rightarrow \lambda \in T+Y$

$$\lambda + t_1 = y_1 \Rightarrow \lambda = y_1 - t_1 \in Y+T$$

$\lambda \in Y+T = \infty$ ו' 'ס' λ ∞ ו' $\lambda \in Y+T$

ה' $\lambda \in Y+T = \infty$ ו' $\lambda \in Y+T$

$$\lambda+T \cap Y \neq \emptyset \Rightarrow \lambda \in (Y+T) \cap Y$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = y_1 - t_1, \lambda_2 = y_2 - t_2$$

$$Y = \bigcup_{\lambda: (\lambda+T) \cap Y \neq \emptyset} (\lambda+T) \cap Y$$

$$\text{Vol}(Y) = \sum \text{Vol}[(\lambda+T) \cap Y] = \infty$$

$$\text{Vol}[(\lambda+T) \cap Y] = \text{Vol}(T \cap (Y-\lambda))$$

$$\text{Vol}(T \cap (Y-\lambda)) = \text{Vol}(T \cap (Y-\lambda))$$

$$\text{Vol}(T \cap (Y-\lambda)) \leq \text{Vol}(T)$$

$$\text{Vol}(T \cap (Y-\lambda)) \leq \text{Vol}(T)$$

$$\text{Vol}(T \cap (Y-\lambda)) \leq \text{Vol}(T)$$

$$\text{Vol}(T \cap (Y-\lambda)) \leq \text{Vol}(T)$$

$$\lambda_1 + \frac{1}{2}x_1 = \lambda_1 + y_1 = \lambda_2 + y_2 = \lambda_2 + \frac{1}{2}x_2$$

$$\lambda \ni \lambda_1 - \lambda_2 = \frac{1}{2}(x_2 - x_1) \in X$$

||

ע"ג

ה' $\lambda \in Y+T = \infty$ ו' $\lambda \in Y+T$

ע' $\lambda \in Y+T = \infty$ ו' $\lambda \in Y+T$

$$\sigma_1, \dots, \sigma_r, \overline{\sigma}_{r+1}, \overline{\sigma}_{r+1}, \dots, \overline{\sigma}_{r+s}, \overline{\sigma}_{r+s}$$

$r = \#\{\text{real embeddings}\}$

$2s = \#\{\text{complex embeddings}\}$

- 732N $\Rightarrow$ $n=r+s$, pd

$$V^*: K \rightarrow \mathbb{R}^r \times \mathbb{C}^s =: V$$

$$V^*(x) = (\underbrace{\sigma_1(x), \dots, \sigma_r(x)}_{r+s})$$

$K = \mathbb{Q}(u)$
 $V^*(a+bi) = a+bi \in \mathbb{C}$

$K = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$: 10/13
 $V^*(a+b\sqrt{2}) = (a+b\sqrt{2}, a-b\sqrt{2})$

- 732)

$$V: K \rightarrow \mathbb{R}^{r+2s}$$

$$V(x) = (\sigma_1(x), \dots, \sigma_r(x), \operatorname{Re} \sigma_{r+1}(x), \operatorname{Im} \sigma_{r+1}(x), \dots)$$

: 732)

המשפט 7.32: Δ_K של K הוא $\det M$ כאשר $x_1, \dots, x_n \in K$ הם בסיס של K על $\mathbb{Q}$.

$$M = \begin{pmatrix} -V(x_1) \\ \vdots \\ -V(x_n) \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} \sigma_1(x_1) & \dots & \sigma_r(x_1) & \overline{\sigma_{r+1}(x_1)} & \dots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \sigma_1(x_n) & \dots & \sigma_r(x_n) & \overline{\sigma_{r+1}(x_n)} & \dots \end{pmatrix}$$

$$\det M = (-2i)^s \det D$$

המשפט 7.32: Δ_K של K הוא $\det M$ כאשר $x_1, \dots, x_n \in K$ הם בסיס של K על $\mathbb{Q}$.

$$\begin{pmatrix} \operatorname{Re} z \\ \operatorname{Im} z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2i & -1/2i \end{pmatrix}}_{\det (-2i)^{-1}} \begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix}$$

המשפט 7.32: Δ_K של K הוא $\det M$ כאשר $x_1, \dots, x_n \in K$ הם בסיס של K על $\mathbb{Q}$.

$$\Delta_K = \det M = \det \begin{pmatrix} -V(x_1) \\ \vdots \\ -V(x_n) \end{pmatrix}$$

המשפט 7.32: Δ_K של K הוא $\det M$ כאשר $x_1, \dots, x_n \in K$ הם בסיס של K על $\mathbb{Q}$.

$$\Delta(x_1, \dots, x_n) = \det D^2 = (-2i)^s \cdot (\det M)^2$$

$$S \equiv 0 \pmod{2} \iff \Delta(x_1, \dots, x_n) \equiv 0 \pmod{2}$$

$$DD^T = [\text{Tr}(x_i x_j)]_{i,j} \quad (\text{*)}$$

$$\textcircled{*} \Rightarrow \Delta(x_1, \dots, x_n) = \det DD^T = \det D^2$$

□

$$N(\sigma) = \# \sigma / n$$

$$\Delta(a/\mathbb{Z}) = N(\sigma)^2 \Delta(0/\mathbb{Z})$$

$$\begin{aligned} & \text{Let } \sigma = \sigma_a \text{ be a permutation of } \{1, \dots, n\} \text{ such that } \sigma(i) = a_i \\ & \text{Then } \Delta(ax_1, \dots, ax_n) = \det p_a = [\text{Tr}_{K/Q}(ax_i ax_j)]_{i,j} = p_q [\text{Tr}_{K/Q}(x_i x_j)]_{i,j} p_a^T \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Delta(ax_1, \dots, ax_n) = \det p_a^2 \Delta(x_1, \dots, x_n) = N_{K/Q}(\sigma)^2 \Delta(x_1, \dots, x_n)$$

□

$$V(\sigma) \subseteq \mathbb{R}^n \text{ is a } \sigma \text{-invariant subspace. } \sigma \text{ is a permutation of } \{1, \dots, n\}.$$

$$\begin{aligned} & \text{Let } \sigma \text{ be a permutation of } \{1, \dots, n\} \text{ and } x_1, \dots, x_n \text{ be a basis of } V(\sigma). \\ & \text{Then } \Delta(x_1, \dots, x_n) = \det V(x_1, \dots, x_n) = \det V(\sigma) = \det \sigma = \text{sgn}(\sigma) = \pm 1. \end{aligned}$$

$$\text{Let } \sigma \text{ be a permutation of } \{1, \dots, n\} \text{ and } a \in \mathbb{Z} \text{ such that } \sigma(a) = a.$$

$$|\text{Norm}_{K/Q}(a)| = \frac{n!}{n^n} \left(\frac{4}{\pi}\right)^s N(\sigma) |\Delta(0/\mathbb{Z})|^{1/2}$$

$$X_c = \{(x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_s) \mid \sum |x_i|^2 + 2 \sum |y_j|^2 = c\}$$

שאלה 15: X_t - קבוצת נקודות, $\mathcal{O}$ - חוג, $\Delta(\mathcal{O}/\mathbb{Z})$ - דטרמיננט

$$\text{Vol}(X_t) = 2^{\frac{r-s}{n!}} \prod_{i=1}^s t_i^{e_i}$$

הערה: $\mathbb{Z}$

$$\text{Vol}(L) = 2^{-s} N(\sigma) |\Delta(\mathcal{O}/\mathbb{Z})|^{1/2}$$

אם $\exists \alpha \neq 0, v(\alpha) \in X_t$ אז $\text{Vol}(X_t) > 2^n \text{Vol}(L)$ - $\underline{\text{פירוק}}$

לכן, $t = t(\varepsilon) \rightarrow 0$ כ- $\varepsilon \rightarrow 0$

$$t^n = \varepsilon + n! \cdot \frac{2^{r-s}}{\pi^s} N(\sigma) |\Delta(\mathcal{O}/\mathbb{Z})|^{1/2}$$

$v(\alpha) \in X_t \iff \alpha = \alpha(\varepsilon)$ ו- $\varepsilon > 0$ כך

אם $\varepsilon = 0$ אז $\alpha \in \mathcal{O}$ ו- $v(\alpha) \in X_t$ אם ורק אם $\alpha \in \mathcal{O}$ ו- $v(\alpha) \in X_t$ - $\underline{\text{אז}}$

$$\text{Norm}(\alpha) = \prod_{i=1}^r |\sigma_i(\alpha)| \cdot \prod_{j=1}^s (\text{Re}(\sigma_{i+r}(\alpha))^2 + \text{Im}(\sigma_{i+r}(\alpha))^2)^{e_j}$$

$$\leq \prod_{i=1}^r |x_i| \prod_{j=1}^s (z_j^2 + y_j^2) \leq \frac{1}{n^n} (\sum |x_i| + 2 \sum (z_j^2 + y_j^2))^n \leq$$

$$\leq \frac{1}{n^n} t^n \leq \frac{n!}{n^n} \cdot \frac{4^s}{\pi^s} \cdot N(\sigma) |\Delta(\mathcal{O}/\mathbb{Z})|^{1/2}$$

לכן $t \rightarrow 0$

$$C(K) = \frac{\text{Fract. Ideal}}{\text{Principle}}$$

$$\Gamma_K = \{ \alpha \in K^* \mid \alpha \in \mathcal{O} \}$$

$C(K) \rightarrow \mathbb{R}$ - $\underline{\text{פונקציה}}$

(הערות: $\mathbb{Z}$)

אם $\alpha \in \Gamma_K$ אז $v(\alpha) \in X_t$ ו- $v(\alpha) \in X_t$ - $\underline{\text{אז}}$

$$N(\alpha) \leq \frac{n!}{n^n} \left(\frac{4}{\pi} \right)^s |\Delta(\mathcal{O}/\mathbb{Z})|^{1/2} = M$$

לכן $\alpha \in \mathcal{O}$ ו- $v(\alpha) \in X_t$ - $\underline{\text{אז}}$

משפט: CCK - שם

הוכחה: נניח $\mathcal{O}_K$ הוא רשת ספיקה של $K/\mathbb{Q}$. נגדיר $\mathcal{O}_K^* = \{ \alpha \in \mathcal{O}_K : \text{Norm}(\alpha) \neq 0 \}$. נגדיר $\mathcal{O}_K^* = \{ \alpha \in \mathcal{O}_K : \text{Norm}(\alpha) \neq 0 \}$. נגדיר $\mathcal{O}_K^* = \{ \alpha \in \mathcal{O}_K : \text{Norm}(\alpha) \neq 0 \}$.

נניח $\alpha \in \mathcal{O}_K^*$. נגדיר $\mathcal{O}_K^* = \{ \alpha \in \mathcal{O}_K : \text{Norm}(\alpha) \neq 0 \}$. נגדיר $\mathcal{O}_K^* = \{ \alpha \in \mathcal{O}_K : \text{Norm}(\alpha) \neq 0 \}$. נגדיר $\mathcal{O}_K^* = \{ \alpha \in \mathcal{O}_K : \text{Norm}(\alpha) \neq 0 \}$.

$$|\text{Norm}(\alpha)| \leq |\text{Norm}(h_1)| \cdot M$$

⇔

$$|\text{Norm}(\alpha)| \cdot |\text{Norm}(h_1)|^{-1} \leq M$$

נניח $\mathcal{O}_K^* = \{ \alpha \in \mathcal{O}_K : \text{Norm}(\alpha) \neq 0 \}$. נגדיר $\mathcal{O}_K^* = \{ \alpha \in \mathcal{O}_K : \text{Norm}(\alpha) \neq 0 \}$. נגדיר $\mathcal{O}_K^* = \{ \alpha \in \mathcal{O}_K : \text{Norm}(\alpha) \neq 0 \}$.

$$|\text{Norm}(\alpha)| = |\text{Norm}(\alpha h_1^{-1})| = |\text{Norm}(\alpha)| \cdot |\text{Norm}(h_1^{-1})| \leq M$$

משפט: CCK - שם. נגדיר $\mathcal{O}_K^* = \{ \alpha \in \mathcal{O}_K : \text{Norm}(\alpha) \neq 0 \}$. נגדיר $\mathcal{O}_K^* = \{ \alpha \in \mathcal{O}_K : \text{Norm}(\alpha) \neq 0 \}$. נגדיר $\mathcal{O}_K^* = \{ \alpha \in \mathcal{O}_K : \text{Norm}(\alpha) \neq 0 \}$.

משפט: CCK - שם. נגדיר $\mathcal{O}_K^* = \{ \alpha \in \mathcal{O}_K : \text{Norm}(\alpha) \neq 0 \}$. נגדיר $\mathcal{O}_K^* = \{ \alpha \in \mathcal{O}_K : \text{Norm}(\alpha) \neq 0 \}$. נגדיר $\mathcal{O}_K^* = \{ \alpha \in \mathcal{O}_K : \text{Norm}(\alpha) \neq 0 \}$.

$$\mu = \frac{3!}{3^3} \cdot \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \cdot |\mathcal{O}_K/\mathbb{Z}| \leq \frac{8}{\pi} \cdot 4 \cdot 4$$

$$\leq 4$$

משפט: CCK - שם. נגדיר $\mathcal{O}_K^* = \{ \alpha \in \mathcal{O}_K : \text{Norm}(\alpha) \neq 0 \}$. נגדיר $\mathcal{O}_K^* = \{ \alpha \in \mathcal{O}_K : \text{Norm}(\alpha) \neq 0 \}$. נגדיר $\mathcal{O}_K^* = \{ \alpha \in \mathcal{O}_K : \text{Norm}(\alpha) \neq 0 \}$.

משפט: CCK - שם. נגדיר $\mathcal{O}_K^* = \{ \alpha \in \mathcal{O}_K : \text{Norm}(\alpha) \neq 0 \}$. נגדיר $\mathcal{O}_K^* = \{ \alpha \in \mathcal{O}_K : \text{Norm}(\alpha) \neq 0 \}$. נגדיר $\mathcal{O}_K^* = \{ \alpha \in \mathcal{O}_K : \text{Norm}(\alpha) \neq 0 \}$.

502 → ح/ل : ٥

$$\begin{array}{c|c|c} P & X^2 + 14 & K - Z^{(1)} \\ \hline 2 & X^2 & Z = B_2^2 \\ 3 & X^2 - 1 \\ & (X+1)(X-1) \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} Z = B_3 \cdot B_3' \\ f(B_3) = f(B_3') = 1 \end{array} \right.$$

- 672

$$[\beta_2]^2 = 1$$

$$[\beta_3] = [\beta'_3]^{-1}$$

1. $p_1 \cdot p_2 = a + b\sqrt{14}$ rdc

$\therefore f=1$ ps $2 = \text{min}$ $\leftarrow$ $2 = a^2 + 14b^2$
 $\text{min} - \downarrow$ $b=0, a^2=2$

[illegible]

[illegible]

$$2 + \sqrt{-14} = \beta_2 \beta_3^2$$

4. 350N $[\beta_3] \leq 2$ 330N $[\beta_3]^2 = [\beta_2]$, p. 61
 $[\beta_3]$ 031' p. 8 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \cong (K) \text{ s. 11}$

Geben: pk K/Q, ממד הממד — ס'ס' , ממד $1 < \Delta(O_k/\mathbb{Z})$

הוכחה: נניח $n \geq 2$ ונניח $1 < \epsilon$.

$$|\Delta(G/\mathbb{Z})|^{1/2} \geq \frac{n^n}{n!} \left(\frac{4}{\pi}\right)^s \geq \frac{n^n}{n!} \left(\frac{4}{\pi}\right)^{n/2} > 1$$
 כאשר $n = 2s$ ו- $s \leq \frac{n}{2}$.

1. $K^{I_p} = \mathbb{Q}$, $I_p = 1$
 2. $G = \langle I_p \rangle$, $G = \langle I_p \rangle$

[illegible]

הוכחה: נניח $H = \{z_1, \dots, z_n\}$ ונניח: $|H| \geq 2$.
אם $n=1$, אז $G \cong S_1$ והטענה נכונה.
אם $n \geq 2$, אז $G \cong S_n$ והטענה נכונה.

$g_{R_1, \neq R_1} = e$ p $g_{G, e} = 1$, $-2'G \cup G$ $G = e$ $|||$
 $\cup$ g $f_{R_1, e}$ e , $e'_{R_1, e}$ $\rightarrow 3, 1$ $G = e$ $|||$
 $\neq e$ $j_{R_1, e}$, $i_{R_1, e}$ $\cup$ $\tau \neq j$ $\neq e$, $G \geq S_{R_1, \tau}$, $j \neq e$
 $- e$ $\neq e$

$$a. \quad \langle \psi | \rho - \langle \psi | \rho \rangle | \psi \rangle = S(\rho_{\psi})$$

$$U_{mit}(O_k) \approx \mu_k \times \sum_{i=1}^{T-1} \frac{1}{T}$$

← שרט היציג ק

(משקל): $\frac{1}{T}$ $\frac{1}{T}$ (משקל)