

סדר חזקות

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad x_0 = 0 \quad \text{נתינת במקרה} \quad - \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$$

מנוסח אופס - סדר חזקות $\sum a_k x^k$ קיים מספר $RE[0, \infty]$ - רדיוס התכנסות R שבו הסדר מתכנס ובהתאם $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| < R\}$ הסדר מתכנס

בנוסף הסדר מתכנס במ"ש בכל תת קטע סגור $(-A, A)$ עבור $A < R$

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} (|a_n|)^{\frac{1}{n}} \quad \text{מנוסח קושי הדמר}$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad \text{מנוסח דאלמבר}$$

$$R = \infty \iff \frac{a_k}{a_{k+1}} = k+1 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty, \quad a_k = \frac{1}{k!}, \quad \sum \frac{x^k}{k!} \quad (1) \quad \text{דוגמאות}$$

$$R = 0 \iff \sqrt[k]{k!} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty, \quad a_k = k!, \quad \sum k! x^k \quad (2)$$

$$R = 1 \iff \sqrt[k]{k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 1, \quad a_k = \frac{1}{k}, \quad \sum \frac{x^k}{k} \quad (3)$$

מנוסח - $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ מתרנס ברדיוס $R > 0$ איזי סדר $x \in (-R, R)$

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} \quad (1)$$

$$\int_0^x f(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} \quad (2)$$

והטורים הנ"ל בימי אופס רדיוס התכנסות

מסקנה - f גזירה ב $(-R, R)$ אינסוף פסגות - $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

$$|x| < 1, \quad \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \quad (1) \quad \text{דוגמאות}$$

$$|x| < 1, \quad \sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad (2)$$

$$\mathbb{R}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x \quad (3)$$

$$(-1, 1), \quad -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = \log(1-x) \quad (4)$$

$$\mathbb{R}, \quad \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \quad (5)$$

$$|x| < 1, \quad \frac{1}{1-(x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} \quad (6)$$

$$|x| \leq 1, \quad \arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} \quad (7)$$

תרגיל: מצאנו בטורים סגורים פונקציות הבאות:

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(n+3)!} \quad (1)$$

$$e^{x+2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^{n+3}}{(n+3)!} + 1 + (x+2) + \frac{(x+2)^2}{2!} =$$

$$= (x+2)^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(n+3)!} + 1 + (x+2) + \frac{(x+2)^2}{2!}$$

$$S(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (2)$$

$$S'(x) = 1 + x^2 + x^4 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x)(1+x)} \quad (x < 1)$$

$$S(x) = \log \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \quad \leftarrow \text{מוצאים פונקציה קבוצה ונקבע}$$

$$S(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + \dots = x(1 + 2x + 3x^2 + \dots) =$$

$$= x \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right)' = x \left(\frac{1}{1-x} \right)' = x \cdot \frac{1}{(1-x)^2}$$

קצה קצוץ התכנסות

מעט - יהי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ טור עם התכנסות $0 < R < \infty$. התנאים הבאים שקולים:

- (1) הטור מתכנס ב- $x=R$
- (2) הטור מתכנס במ"ט $[0, R)$ ב- $x=R$
- (3) - ו- $[0, R]$

$$\lim_{x \rightarrow R^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \quad \text{מסקנה - אם הטור מתכנס ב- } x=R \text{ אזי}$$

$$\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n} \quad \text{ראינו - תלמה}$$

הטור מתכנס ב- $|x| < 1$ ואם נציב נראה שזה בנק $x=1$

ע"י המעט, הטור מתכנס במ"ט $[0, 1]$ ב- $x=1$ מה שאומר ש-

$$\log 2 = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

$$\pi = 4 \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \dots \right) \quad \text{מכאן - תרגיל}$$

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \cdot x^{2k+1} \quad \text{ראינו -}$$

$$\arctan 1 = \frac{\pi}{4} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \cdot x^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \quad \text{הטור מתכנס בנק } x=1 \text{ מתכנס במ"ט } [0, 1] \text{ בנק:}$$