

סדרת של פונקציות

התכנסות נקודתית

$$f_n : X \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}$$

הפזרה - נאמר כי f_n מתכנסת נקודתית בנק $x \in X$ אם הסדרה $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ סדרה מתכנסת.

אם $\{f_n\}$ מתכנסת בכל נקודה ב- X נאמר $\{f_n\}$ מתכנסת נק' ב- X .
נסמן:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) : X \rightarrow \mathbb{R}$$

דוגמאות

$$(1) \quad f_n(x) = \frac{x}{n} \quad \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{n} = 0$$

$$\text{עכ"ל} \quad \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \quad f_n \rightarrow 0$$

$$(2) \quad g_n(x) = x^n \quad \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$|x| > 1 : \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|^n} = 0$$

$$x = 1 : g_n(x) \rightarrow 1$$

$$x = -1 : g_n(x) \text{ לא מתכנסת}$$

$$0 < x < 1 : g_n(x) \rightarrow \infty \quad (\text{לא מתכנסת})$$

אז $\{g_n\}$ מתכנסת נקודתית ב- $\mathbb{R}$:

$$g(x) = \begin{cases} 1 & x = 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases} \quad (\text{הקטע } \{x \mid |x| > 1\})$$

התכנסות במידה שווה

הפזרה - תהי $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ סדרה של פונקציות. נאמר ש- f_n מתכנסת במידה שווה בתחום X אם קיימת $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ כך שכל $\epsilon > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שעל $n \geq N$ מתקיים:

$$\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad \forall x \in X \quad \text{כלומר לכל } x \in X$$

$$\text{נסמן} \quad f_n \xrightarrow{u} f \quad \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

הערה - התכנסות במידה שווה $\implies$ התכנסות נק' ב- f . (אקדס לסי הפוק')

$$\text{דוגמה -} \quad f_n(x) = x^n \quad \text{ב-} [-0.5, 0.5] \quad \text{חשוקה}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |x^n| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0 \implies f_n \rightarrow 0 \text{ נקודתית ב-} [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$$

$$\sup_{x \in [-0.5, 0.5]} |f_n(x)| \leq \frac{1}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

אז לכל $\epsilon > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שעל $n \geq N$ מתקיים $|f_n(x)| < \epsilon$ לכל x בתחום. לכן $f_n \xrightarrow{u} 0$ ב- $[-0.5, 0.5]$.

עליית התכנסות המידה נלווה: $f_n \xrightarrow{u} f$ אוק:

$$\exists(\epsilon > 0), \forall(N \in \mathbb{N}), \exists(n_0), \exists(x \in X), \{|f_n(x) - f(x)| > \epsilon\}$$

דוגמה - $f_n(x) = x^n$ - $[0,1]$

התכנסות נקודתית: $f_n(x) \rightarrow f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$

נראה שאין התכנסות במ"ס - $[0,1]$

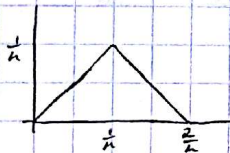
נסתכל על $x_n = 1 - \frac{1}{n} \in [0,1]$

$$f_n(1 - \frac{1}{n}) = (1 - \frac{1}{n})^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e}$$

אבל $f(x_n) = 0$

עבור $\epsilon = \frac{1}{2e}$ קיים N כך שכל $n > N$

$$f_n(1 - \frac{1}{n}) > \epsilon = \frac{1}{2e} \Rightarrow \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| \geq |f_n(x_n) - 0| = |f_n(x_n)| > \epsilon$$



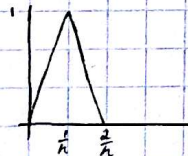
דוגמה - f_n - $[0,1]$ מוגדרת באופן הבא:

התכנסות נקודתית: $f_n \rightarrow 0$

נבדוק התכנסות במ"ס: $\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - 0| \stackrel{?}{\xrightarrow{n \rightarrow \infty}} 0$
 $\downarrow$
 $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

אז יש התכנסות במידה נלווה:

$$f_n(x) \xrightarrow{u} f(x)$$



דוגמה - $f_n: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ באופן הבא:

התכנסות נקודתית: $f_n \rightarrow 0$

התכנסות במ"ס - $\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| \geq f_n(\frac{1}{n}) = 1 \not\rightarrow 0$

אז $f_n \not\xrightarrow{u} 0$

דוגמה - $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$ - $[0,1]$

עבור $x=0,1$ $f_n(x) = 0$

$x^n \rightarrow 0$ $x \in (0,1)$

$\downarrow$

$f_n(x) \rightarrow 0$ $\leftarrow$ $f_n(x) \rightarrow 0$ $\forall x \in [0,1]$

$$f'_n(x) = nx^{n-1} - (n+1)x^n \stackrel{?}{\rightarrow} 0$$

הנגזרת מתאפסת כאשר $x=0, x=\frac{n}{n+1}$ (אוק, נקודות)

נשים לב $f_n(\frac{n}{n+1}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

$\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x)| \leq f_n(\frac{n}{n+1}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ $\leftarrow$ $\forall x$

תרשים - $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ סדרת פונקציות
 נניח $f_n \xrightarrow{u} f$ ב- $[a, b]$
 נניח בנוסף $f_n(b) \rightarrow f(b)$
 אזי $f_n \xrightarrow{u} f$ ב- $[a, b]$
 דעק שנסמן $f(b)$

הוכחה - יהי $\epsilon > 0$.
 מההגדרה נובע שיש N_1 כך שעל N_1 מתקיים:

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad (\forall x \in [a, b])$$

$$|f_n(b) - f(b)| < \epsilon \quad \text{כאן בן קיים } N_2 \text{ כך שעל } N_2$$

דכן עבור $N = \max\{N_1, N_2\}$ נקבל לכל $n > N$:

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad (\forall x \in [a, b])$$

כלומר $f_n \xrightarrow{u} f$ ב- $[a, b]$

הגדרה - F משפחה של פונקציות המוגדרות על קבוצה A .
 נאמר F -ט חסומה באחד אחידה י"י M אם:

$$\forall f \in F, \forall x \in A, (|f(x)| < M)$$

תרשים - תהי $\{f_n\}$ סדרה של פונקציות ב- A .

נניח $f_n \xrightarrow{u} f$ ב- A .
 (1) הוכיחו כי אם f_n חסומות באחת אחידה, כלומר $|f_n| < M_n$, אז f חסומה.

הוכחה - עבור $\epsilon = 1$ קיים N_0 כך ש- $|f_{N_0}(x) - f(x)| < 1$ לכל $x \in A$.
 נסבר $|f_{N_0}(x)| \leq M_{N_0}$ וכן $-M_{N_0} - 1 \leq f(x) \leq M_{N_0} + 1$ $\forall x \in A$.

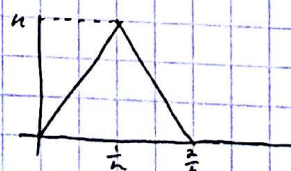
(2) נניח שההתכנסות היא נקודתית בעבר.
 הוכיחו ששם $\{f_n\}$ חסומה במידה אחידה ב- A י"י M אזי $|f(x)| \leq M$ לכל $x \in A$.

הוכחה - נובע מכך שאי-שוויון העט (שומר בעבר)

(3) הוכיחו כי אם $|f(x)| < M_0$ לכל $x \in A$ אזי קיים N כך ש- $\{f_n\}_{n=N}^{\infty}$ חסומה אחידה.
 האם ההתכנסות בע"י נחוצה?

הוכחה - $f_n \xrightarrow{u} f$ דכן קיים N כך שעל $N \geq n$ $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ $\sup_{x \in A}$

$$|f_n(x)| = |f_n(x) - f(x) + f(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x)| \leq \epsilon + M_0$$



ההתכנסות בע"י נחוצה. לדוגמה:

(4) הוכיחו כי אם f_n חסומות באחת אחידה, כלומר $|f_n| < M$ חב"ס.

תרגיל - $(-1, 1) \rightarrow \mathbb{R} \quad f_n(x) = 1 + x + \dots + x^n$

חקרו את התכונות המיושגות של $\{f_n\}$

פיתוח - $f_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1-x} = f(x)$

נשים לב $|f_n(x)| \leq n+1$

אם f היא חסומה ב- $(-1, 1)$, אז f_n מתכנסת בהמשך.

תרגיל - $f_n + g_n \xrightarrow{u} f + g \iff \begin{cases} f_n \xrightarrow{u} f \\ g_n \xrightarrow{u} g \end{cases}$

פיתוח - יהי $\varepsilon > 0$. נמצא N כך שלכל $n \geq N$

$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |g_n(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x.$

אז עבור $n \geq N$:

$|f_n(x) + g_n(x) - (f(x) + g(x))| \leq |f_n(x) - f(x)| + |g_n(x) - g(x)| < \varepsilon.$

(לכל x)

תרגיל מתחנה - $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ שבה
 $|f'_n(x)| \leq n$ לכל $x \in [0, 1]$
 $f_n \rightarrow f$ נקודותית.
 הוכיחו $f_n \xrightarrow{u} f$

$|f_n(x) - f_n(y)| \leq |x - y|$

$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$

הוכחה - המשפט של לברנז, לכל n וכל $x, y \in [0, 1]$
 אז נקח $n \rightarrow \infty$ ויהי $\varepsilon > 0$.

נבחר $M > \frac{1}{\varepsilon}$ ונמנה $x_k = \frac{k}{M}$ כחלקים.

$|x - x_k| \leq \frac{1}{M} = \frac{\varepsilon}{2} \iff 0 \leq k \leq M$
 נגד N_k של $n \geq N_k$ וכל $n \geq N_k$ וכל $x \in [0, 1]$ קיים k כך ש-
 $|f_n(x_k) - f(x_k)| < \frac{\varepsilon}{3}$

יהי $x \in [0, 1]$. נמצא k כך ש-
 $|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f_n(x_k)| + |f_n(x_k) - f(x_k)| + |f(x_k) - f(x)|$

עבור $n \geq \max\{N_0, \dots, N_M\}$ מתקיים:

$|f_n(x_k) - f(x_k)| < \frac{\varepsilon}{3}$

$|f_n(x_k) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$

$|f(x_k) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$

$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

מתנאי פסקל

- סל

קריטריון קושי להיכנסות קושי

$$f_n: A \rightarrow \mathbb{R}$$

$\{f_n\}$ מתכנסת קושי ב- A $\iff \forall (\epsilon > 0), \exists (n \in \mathbb{N}), \forall (n, m > n), \forall (x \in A), |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$

משפט - תהייה $f_n: D \rightarrow \mathbb{R}$ נניח $f_n \xrightarrow{u} f$ או בצורה אחרת:
 x_0 - נקודה f - פונקציה
 x_0 - נקודה f - פונקציה

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

דוגמה - $f_n(x) = x^n$ ב- $[0, 1]$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x=1 \\ 0 & \text{o.u.} \end{cases}$$

אז אין התכנסות קושי ב- $[0, 1]$

משפט - נניח $f_n \xrightarrow{u} f$ ונך x_0 כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n \in \mathbb{R}$ אז $\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = L_n \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} L_n$$

(ההוכחה עובדת גם אם $x_0 = \pm \infty$)

הוכחה

נניח $x_0 = +\infty$ ונניח $\{L_n\}$ סדרת קושי ונניח $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n = L$.
 נניח $\epsilon > 0$. אז $\exists N$ כך שכל $n, m > N$ מתקיים $|L_n - L_m| < \epsilon$.

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$$

$$|L_n - L_m| = \lim_{x \rightarrow x_0} |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon \implies L_n \rightarrow L$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \quad (*)$$

$$|f(x) - L| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - L_n| + |L_n - L|$$

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3} \quad n > N \quad \text{כך נבחר } N \quad \text{על ידי קושי } f_n \xrightarrow{u} f$$

$$|f_n(x) - L_n| < \frac{\epsilon}{3} \quad x > M \quad \text{כך נבחר } M \quad \text{על ידי } \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = L_n$$

$$|L_n - L| < \frac{\epsilon}{3} \quad n > N' \quad \text{כך נבחר } N' \quad \text{על ידי קושי } L_n \rightarrow L$$

$$n > \max\{N, N'\} \quad \text{אז } |f(x) - L| \leq 3 \cdot \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

$$|f(x) - L| \leq 3 \cdot \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \quad \text{אז}$$

$$f_n(x) = \frac{x}{x+n}, \quad f_n: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\forall x, f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)) = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x)) = 1$$

אז אין התכנסות קושי.

משפט דיוני

רצופות $f_n \rightarrow f$, נקודתיות
 (1) $\{f_n\}$ מונוטונית
 (2) f רציפה

אז $f_n \xrightarrow{u} f$

תרגיל - יהי g רציפה ב- $[0,1]$, $g(1) = 0$

הוכיחו $f_n(x) = x^n g(x)$ מתכנסת במ"ש ב- $[0,1]$

הוכחה - g רציפה בקטע סגור $\leftarrow \exists M$ כזו. $|g(x)| < M$

$$|f_n(x)| \leq |x^n| \cdot |g(x)| \leq M \cdot |x^n|$$

אז לכל $x \in [0,1]$, $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, $f_n(1) = 0$

f_n רציפה וכן $f = 0$ ב- $[0,1]$
 עבור x שבו $g(x) \neq 0$:

$$\left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right| = \left| \frac{x^{n+1} g(x)}{x^n g(x)} \right| = |x| \leq 1$$

קזת (1) - $f_n(x)$ שומרת סימן :

$$\left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right| = \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \leq 1$$

מסקנה - לכל x בפניק $f_n(x)$ סדרה מונוטונית.
 ומשפט דיוני $f_n \xrightarrow{u} f$