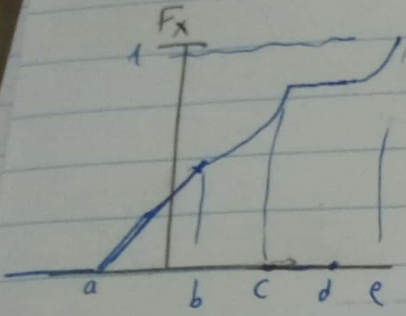
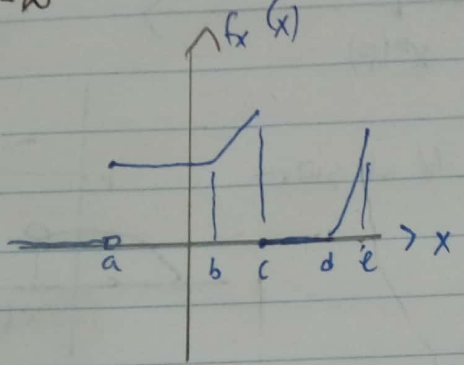
הסתברות תרגול 4

1/4

<u>תזכורת</u>: עבור X מ"מ עם פה"מ $F_x(x)$ וצפיפות $f_x(x)$

$$F_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(t)\,dt$$



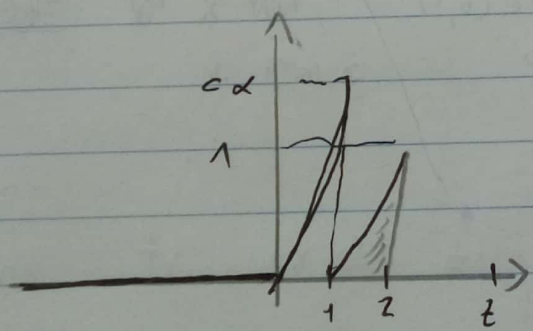


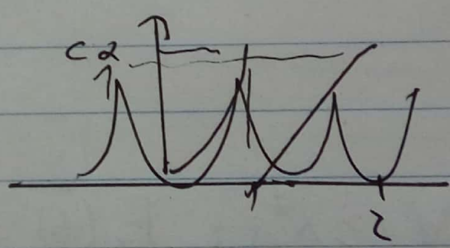
<u>תרגיל</u>: נתון $\alpha>0$ נתונה הצפיפות:

$$f(t) = \begin{cases} c\alpha t^2 & t\in[0,1] \\ t-1 & t\in(1,2] \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

עבור קבוע c כלשהו

א. ציירו את f.



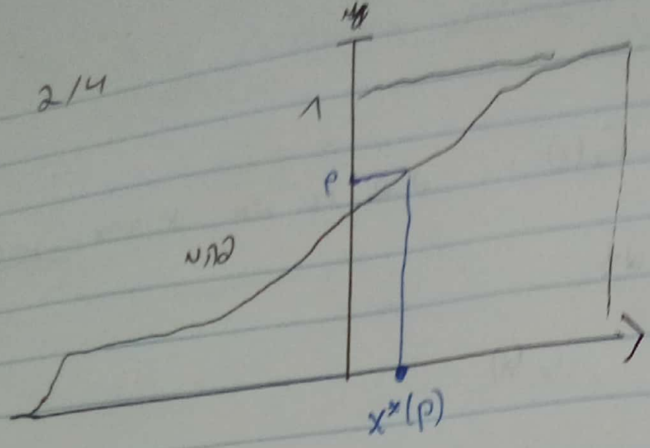


ב. מצאו את c.

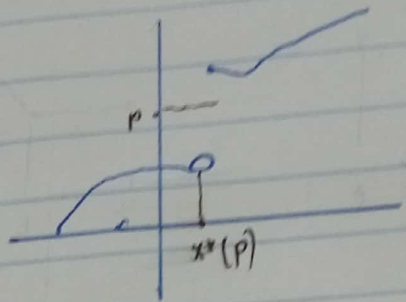
$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = \int_0^1 c\alpha t^2\,dt + \underbrace{\int_0^2 (t-1)^2\,dt}_{=1/2} = \frac{c\alpha t^3}{3}\Big|_0^1 + 1/2$$

שטח המשולש

$$\Rightarrow \frac{c\alpha}{3} + 1/2 = 1 \Rightarrow \frac{c\alpha}{3} = 1/2 \Rightarrow \boxed{c = \frac{3}{2\alpha}}$$



inverse function



הגדרה: X מ"מ עם פה"מ $F_X(x)$

$$\forall p\in(0,1) : \quad X^*(p)=\sup\{t \mid F_X(t)\le p\}$$

שאלה: יהי X מ"מ, $p\in(0,1)$

א. הראו כי $F_X(X^*(p))\ge p$

פתרון:

מהגדרת X^* נובע שלכל t,

(1) $\forall t\ge X^*(p) : F_X(t)\ge p$

נזכור כי F_X רציפה מימין

אז:

$$p\le \lim_{t\to X^*(p)^+} F_X(t)=F_X(X^*(p))$$

אי שוויון נשמר בגבול / רציפה מימין

ב. הראו כי אם $X^*(p)$ נק' רציפות של f, $F_X(X^*(p))=p$

פתרון: לכל $t\le X^*(p)$ מתקיים:

$$F_X(t)\le p$$

$$p\ge \lim_{t\to X^*(p)^-} F_X(t)=F_X(X^*(p))$$

F רציפה, (בפרט) רציפה משמאל

ולכן משני אי השוויונים

לכן $p=F_X(X^*(p))$

תרגיל:

יהי X מ"מ עם:

3/4 $F_X(t)=\left(1-\frac{1}{t^{\alpha}}\right)\mathbb{1}_{(1,\infty)}(t)$

עבור פרמטר $0<\alpha$ נתון.

א. הראו כי F_X אכן פהמ"צ: גבול

$\lim_{t\to-\infty}F_X(t)=0$

$\lim_{t\to\infty}F_X(t)=1$

מונוטונית עולה ממש ב- $(1,\infty)$:

- פונק' רציפה

ב. מצאו f_X (צפיפות): וגזרו אותה.

לכל $t\in[1,\infty)$:

$1-t^{-\alpha}$

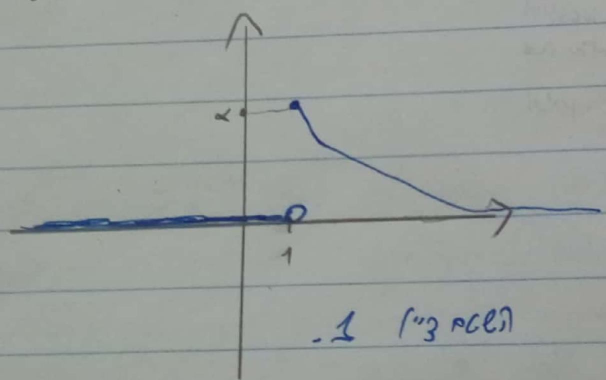
$F_X(t)=\alpha\cdot t^{-(\alpha+1)}$

נגזר

וכל $t<1$:

$F_X(t)=0$

רוצה שאינטגרל עד הנק' 1 יהיה 0



השטח צ"ל 1.

ג. מצאו את התפלגות $\ln(X)$:

מ"מ פה"מ

$$F_{\ln(X)}(t)\underset{\text{הגדרת פהמ}}{=}P(\ln(X)\le t)\underset{}{=}P(X\le e^t)=F_X(e^t)=\left(1-\frac{1}{e^t}\right)\mathbb{1}_{(1,\infty)}(e^t)$$

e^t מונוטונית עולה משמרת את הא"ש באותו כיוון

$$=\left(1-e^{-t\alpha}\right)\mathbb{1}_{(0,\infty)}(t)$$

בעצם זה נקרא פהמ"צ של מ"מ מעריכי עם פרמטר α.

4/4

2. הדגימו כיצד ניתן לייצר מ"מ מהתפלגות F_X, ע"י הפעלת טרנספורמציה על מ"מ אחיד בקטע $(0,1)$, כלומר מ"מ

$$F(S) = \mathbb{1}_{(0,1)}(S)$$

<u>פתרון:</u> נמצא את פונק' האחוזון $X^*(p)$ כלומר,

$$\forall p \in (0,1) \qquad p = F_X(X^*(p)) = \cancel{1 - \frac{1}{(X^*(p))^\alpha}}$$

שמקיים

נבודד את $X^*(p)$

$$= 1 - \frac{1}{(X^*(p))^\alpha}$$

$$\Rightarrow (X^*(p))^\alpha = \frac{1}{1-p} \Rightarrow X^*(p) = \frac{1}{\sqrt[\alpha]{1-p}}$$

פונק' אחוזון

מספר ≥ 1

נגריל p אחיד בקטע $(0,1)$ ונפעיל עליו את $\underbrace{X^*(p)}$ – כאן "יצרנו" מ"מ.

התוצאה של זה מ"מ שמתפלגת F_X

וניתן לחשב צעד זה כי ה"מ רציף.