

אינטגרל עם מונות עבריות

פונקציות P, Q , $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$

יש $R(x)$ פונקציה רציונלית פשוטה.

פונקציות רציונליות

10 $\deg Q > \deg P$

פונקציות רציונליות יסודיות

$a, A \in \mathbb{R}$

(1) $\frac{A}{x-a}$

$a, A \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$

(2) $\frac{A}{(x-a)^n}$

($p^2 - 4q < 0$) $A, B, p, q \in \mathbb{R}$

(3) $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$

$n \in \mathbb{N}$ -1-

(4) $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$

פיתוח אינטגרל עם מונות עבריות

(1) $\int \frac{A}{x-a} dx = A \log |x-a| + c$

(2) $\int \frac{A}{(x-a)^n} dx = A \frac{(x-a)^{-(n-1)}}{-(n-1)} + c$

(3) $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx = \int \frac{Ax+B}{(x+\frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4}} dx = \int \frac{A(t-\frac{p}{2})+B}{t^2+a^2} dt =$

$= A \int \frac{t}{t^2+a^2} dt + (B - A\frac{p}{2}) \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{t^2+a^2} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{(\frac{t}{a})^2+1}$

$= \frac{A}{2} \log |t^2+a^2| + \frac{B-A\frac{p}{2}}{a} \arctan(\frac{t}{a}) + c =$

$= \frac{A}{2} \log(x^2+px+q) + \frac{B-\frac{pA}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} \arctan(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}) + c$

(4) $\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n} dx = A \int \frac{t}{(t^2+a^2)^n} dt + \frac{(B-PA)}{2} \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n} =$

$\int \frac{t}{(t^2+a^2)^n} dt = \frac{1}{2} \frac{(t^2+a^2)^{-(n-1)}}{-(n-1)} + c$

$I_n = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n} = \int t' \cdot \frac{1}{(t^2+a^2)^n} dt =$

$= \frac{t}{(t^2+a^2)^n} - \int t \cdot \frac{-n \cdot 2t}{(t^2+a^2)^{n+1}} dt =$

$= \frac{t}{(t^2+a^2)^n} - \int \frac{t^2+a^2-a^2}{(t^2+a^2)^{n+1}} dt =$

$= \frac{t}{(t^2+a^2)^n} - 2n \left[\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n} - a^2 \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{n+1}} \right] =$

$= \frac{t}{(t^2+a^2)^n} + 2n I_n - 2na^2 I_{n+1}$

$$I_{n+1} = \frac{2n-1}{2na^2} I_n + \frac{t}{2na^2(t^2+a^2)^n}$$

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n} dx = \frac{A}{2(1-n)(x^2+px+q)^{n-1}} + (B-\frac{A}{2})I_n + C$$

חלק אחר של פולינומים

משפט - כל פונקציה רציונלית אפשר לכתוב כסכום של פולינום ופונקציה רציונלית פשוטה.
משפט - כל פונקציה רציונלית פשוטה אפשר לכתוב כצירוף ליניארי של יסודיות.

דוגמאות:

$$\begin{array}{r} x \\ x^3 + 0x^2 - 2x + 1 \end{array} \Big| x^2 + 3 \quad \rightarrow \quad \frac{x^3 - 2x - 1}{x^2 + 3} = x - \frac{5x + 1}{x^2 + 3}$$

$$\begin{array}{r} x^2 - x + 1 \\ x^3 + 0x^2 + 0x + 1 \end{array} \Big| x + 1 \quad \rightarrow \quad \frac{x^3 + 1}{x + 1} = x^2 - x + 1$$

$$\begin{array}{r} x^2 - 2x - 3 \\ x^4 - 2x^3 + 0x^2 + 0x + 1 \end{array} \Big| x^2 + 3 \quad \rightarrow \quad \frac{x^4 - 2x^3 - 1}{x^2 + 3} = x^2 - 2x - 3 + \frac{6x + 8}{x^2 + 3}$$

פירוק פולינום יסודיים
בהנחת $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ כן $Q(x) = (x-a)^n$ ו- $\deg P < \deg Q$ (כלומר $n \geq 1$)
אם $P(x) = x^2 - 4x + 20$ ו- $Q(x) = (x^2 + px + q)^n$

$$Q(x) = Q_1(x) \cdot Q_2(x) \cdots Q_n(x) \mid N(x)$$

$$\frac{P}{Q} = \sum \left(\frac{A_j}{(x-a)^{n_j}} \right)$$

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(x-a)^n}$$

$$\frac{A_1 x + B_1}{x^2 + px + q} + \cdots + \frac{A_n x + B_n}{(x^2 + px + q)^n}$$

אם Q_j מהצורה $(x^2 + px + q)^{n_j}$ נקבל גורמים A_k, B_k של המכנים

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x(A+B)+A-B}{(x-1)(x+1)} = \quad (1)$$

$$A+B=0, A-B=1 \rightarrow A=-B=\frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right)$$

$$\frac{x+3}{(x-1)^2(x+1)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{(x+1)^2} + \frac{E}{(x+1)^3} = \quad (2)$$

$$= A(x-1)(x+1)^3 + B(x+1)^3 + C[(x-1)(x+1)^2] + D(x-1)^2(x+1) + E(x-1)^2$$

נציב כמה נקודות נוחות: (צריך להציב רק העונים)

$$x=1 \rightarrow 4 = 8B \rightarrow B = \frac{1}{2}$$

$$x=-1 \rightarrow 2 = 4E \rightarrow E = \frac{1}{2}$$

$$-A=C=\frac{5}{8}, D=\frac{4}{3}$$

נמשך להציב עוד 3 נקודות, ולהקטין מכאן

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{1+x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1) + (x+1)(Bx+C)}{(x+1)(x^2+1)} \quad (3)$$

מחלקים כחלק קטן

$$f(x) = \frac{x^3}{(x^2-1)(x+1)} = \frac{x^3}{(x-1)(x+1)^2} = \quad (4)$$

$$= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} + D$$

צריך נוספת פונקציה

$$D = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$$

$$A = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \cdot (x-1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3}{(x+1)^2} = \frac{1}{4}$$

$$C = \lim_{x \rightarrow -1} f(x) \cdot (x+1)^2 = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3}{x-1} = \frac{1}{2}$$

וכן B

שיטת הצבה

$R(f_1(x) \dots f_k(x)) = f_1 \dots f_k$ קוטר הציונות של

ההצבה משתנה פה, $\int R(x, \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}})$ (1)

הצבה

$$t = \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

$$x = \frac{b-t^2d}{t^2c-a}$$

$$\int \frac{x^3 \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}{2x+3\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}} = \int_{t=\sqrt{\frac{2}{3}}}^{t=\sqrt{\frac{4}{3}}} \frac{t^3 \sqrt{\frac{t^2+1}{t^2-1}}}{2 \cdot \frac{b-t^2d}{t^2c-a} + 3t} dt$$

$$dx = \frac{3t^2[(t^2-1)-(t^3+1)]}{(t^3-1)^2} dt = \frac{3t^2(-2)}{(t^3-1)^2} dt$$

$$= \int \frac{1+t^2}{2 \cdot \frac{1+t^2}{t^2-1} + t} \cdot \frac{-6t^2}{(t^3-1)^2} dt = -6 \int \frac{(1+t)^3 t^3}{2(1+t^3)+t(t^3-1)} dt$$

לפי זה אפשר
לחלק פשוט
עם הנוסחה מתחתית התוצאה

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx = \int \frac{2t dt}{1+t} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ t = \sqrt{x}, x=t^2, dx=2t dt \end{matrix}$$

- דניאל

$$\int R(x, \sqrt[m_1]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \dots, \sqrt[m_k]{\frac{ax+b}{cx+d}})$$

(2)

$n = \text{lcm}(m_1, \dots, m_k)$ = המספר הקטן ביותר שמתחלק בכל m_j (least common multiplier) $(\text{lcm}(3, 4, 6) = 12)$

$t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ - נקרא t ההצבה

- דניאל

$$\int \frac{dx}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt{x})} = \int \frac{6t^5 dt}{t^6(1+2t^3+t^2)} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ t = \sqrt{x}, x=t^2, dx=2t dt \end{matrix}$$