

הסתברות תרגול 2

הסתברות  $\Omega$  - מרחב מדידים,  $\mathcal{F}$  - סיגמא אלגברה,  $P$  - פונקציית הסתברות.  $A \in \mathcal{F}$  היא אירוע.  $\sigma$  - חלוקה של  $\Omega$  (מרחב המדידים)  $\mathcal{F}$  - סיגמא אלגברה.

נניח  $\Omega = [0, 1]$  :  $G = \left\{ [0, \frac{2}{3}], [\frac{1}{3}, 1] \right\}$  חלוקה של  $\Omega$  היא  $\sigma$  אלגברה הנוצרת מן  $G$  (על ידי  $\sigma$ -אלגברה).

$$\mathcal{F} = \left\{ \emptyset, \Omega, [0, \frac{2}{3}], [\frac{2}{3}, 1], [\frac{1}{3}, 1], [0, \frac{1}{3}], [0, \frac{1}{3}) \cup [\frac{2}{3}, 1], [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \right\}$$

הסתברות - הסתברות של אירועים.  $P(A)$  - שכיחות של אירוע  $A$  בתוצאות.

הסתברות  $P(A)$  היא  $P(A) = \frac{P(D \cap A)}{P(D)}$  עבור  $A \in \mathcal{F}$ ,  $D$  - אירוע מסוים.

$$\forall A \in \mathcal{F} \quad Q(A) = \frac{P(D \cap A)}{P(D)}$$

האם  $Q$  היא פונקציית הסתברות?  $Q$  היא פונקציית הסתברות.

$$1) Q(\Omega) = \frac{P(D \cap \Omega)}{P(D)} = 1 \quad \checkmark$$

$$2) Q\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \frac{P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) \cap D\right)}{P(D)} = \frac{P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (D \cap B_i)\right)}{P(D)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{P(D \cap B_i)}{P(D)} = \sum_{i=1}^{\infty} Q(B_i)$$

אם  $Q$  היא פונקציית הסתברות, אז  $Q$  היא פונקציית הסתברות.

הנחה:  $A, B$  מאובחן, קוביחו:

$$\max\{0, P(A) + P(B) - 1\} \leq P(A \cap B) \leq \min\{P(A), P(B)\}$$

דמיון:

$$P(A) \leq P(B) \iff A \subseteq B$$

אם  $A \subseteq B$

$$A \cap B \subseteq A$$

ולכן

$$A \cap B \subseteq B$$

ומכאן  $P(A \cap B) \leq P(A)$

$$P(A \cap B) \leq P(A)$$

וכן

$$P(A \cap B) \leq P(B)$$

$$\rightarrow P(A \cap B) \leq \min\{P(A), P(B)\}$$

הוכחה:  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

$$P(A \cup B) \leq 1 \implies P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$$

$$P(A \cap B) \geq 0$$

$$P(A \cap B) \geq \max\{0, P(A) + P(B) - 1\}$$

$$P(A \cap B) \leq P(A) \cdot P(B)$$

אם  $A, B$  עצמאיים

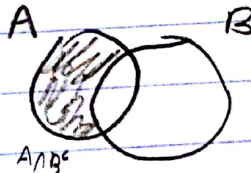
הנחה:

הוכחה:

$$P(A^c \cap B^c) \leq P(A^c) \cdot P(B^c)$$

אם  $A, B$  עצמאיים

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) \geq P(A) - P(A) \cdot P(B) = P(A) \cdot (1 - P(B)) = P(A) \cdot P(B^c)$$



$$= P(A) \cdot (1 - P(B)) = P(A) \cdot P(B^c)$$

$$P(A \cap B) \leq P(A) \cdot P(B) \iff P(A) \cdot P(B^c) \leq P(A \cap B^c)$$

$$\iff P(A \cap B^c) \geq P(A) \cdot P(B^c) \iff P(A \cap B) \leq P(A) \cdot P(B)$$



