1'1 26/10/17

הסתברות — **תרגול 1**

רן סנציקובסקי
שריברנט 303
~~ransa~~
ransnit@gmail.com

סימון: עבור קבוצה A : $A \subseteq \Omega$, $A \in \mathcal{F}$ (וולחליפין)

$$\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 0 & \omega \notin A \\ 1 & \omega \in A \end{cases} \qquad \omega \in \Omega$$

כמעט מיידי, נובע כי:

$$\mathbb{1}_{A^c} = 1 - \mathbb{1}_A$$

עבור $A, B \subseteq \Omega$:

$$\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B$$

$$\forall \omega: \quad \mathbb{1}_{A \cap B}(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in A \cap B \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \iff \begin{cases} \mathbb{1}_A(\omega) = 1 \wedge \mathbb{1}_B(\omega) = 1 \\ \mathbb{1}_A(\omega) = 0 \vee \mathbb{1}_B(\omega) = 0 \end{cases}$$

(הסבר:)

$$\iff \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B = 1$$
$$\mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B = 0$$

נניח כי $\Omega = \mathbb{R}$, אזי לכל $s, t \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{1}_{(-\infty, t)}(s) = \mathbb{1}_{(s, \infty)}(t)$$

שני הצדדים של השוויון הם 1 אמ"מ $s<t$ ו-0 אחרת.

באופן דומה עבור קטע חצי פתוח $\mathbb{1}_{(-\infty, t]}(s) = \mathbb{1}_{[s, \infty)}(t)$

תזכורת:

חוקי דה-מורגן:

תהי $I \neq \emptyset$ קבוצת אינדקסים, ויהיו $\{A_i\}_{i \in I}$ אזי,

א. $\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c$

ב. $\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i \in I} (A_i^c)$

2/1

תרגיל: יהיו $\{A_i\}_{i\in I}$ אוסף של קב', ותהי B קב'. הראו:

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)\cap B = \bigcup_{i\in I}(A_i\cap B)$$

פתרון:

א. יהי $w\in\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)\cap B$, אזי $w\in B$ וגם $w\in\bigcup_{i\in I}A_i$ ובפרט, קיים i כך ש: $w\in A_i$, לכן $w\in A_i\cap B$, לכן $w\in\bigcup_{i\in I}(A_i\cap B)$

כיוון שני קל.

ב. $B\setminus\bigcap_{i\in I}A_i=\bigcup_{i=I}(B\setminus A_i)$

תזכורת: $B\setminus A=B\cap A^c$

פתרון:

$$B\setminus\bigcap_{i\in I}A_i \underset{\text{הגדרה}}{=} B\cap\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right)^c \underset{\text{דה מורגן}}{=} B\cap\left(\bigcup_{i\in I}A_i^c\right) \underset{\text{סעיף קודם}}{=} \bigcup_{i\in I}(A_i^c\cap B) = \bigcup_{i\in I}(B\setminus A_i)$$

∎

תרגיל:

תהי $f:X\to Y$, $\{A_i\}_{i\in I}$ אוסף תתי קבוצות ב-Y, רוצים להראות:

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)=\bigcup_{i\in I}f^{-1}(A_i)$$

תזכורת: $f^{-1}(A)=\{w\in X. f(w)\in A\}$
f לא בהכרח הפיכה, אם יש מוגדרת

פתרון: נבחר $w\in f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)$ אזי $f(w)\in\bigcup_{i\in I}A_i$

לכן, קיים $i\in I$ כך ש: $f(w)\in A_i$, לכן $w\in f^{-1}(A_i)$ ולכן $w\in\bigcup_{i\in I}f^{-1}(A_i)$.

כיוון הפוך דומה. ∎

תרגיל: יהי Ω, F σ אלגברה, P מידת הסת', (Ω,F,P)

תהי $A_1,A_2,\ldots\in F$ סדרה מונוטונית.

נראה:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\lim_{n\to\infty}P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)$$

מפיקים רציפות כי P רציפה.

3/1 $A_1,\ A_1\cup A_2,\ A_1\cup A_2\cup A_3, \dots$

נבנה סדרת מאורעות חדשה: B_1, B_2

$B_1 = A_1$

$B_n = \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) = A_n \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right)$

(מסתכלים על האיברים שנוספו)

$\underbrace{B_n \uplus \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right)}_{\text{זרות}} = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$

$\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ לכל n, B_i - קב' זרות (בדוגמא)

$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) \underset{B_i \text{ הגדרת}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} P\left(\bigcup_{j=1}^{i} A_j\right) - P\left(\bigcup_{j=1}^{i-1} A_j\right)$

$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P\left(\bigcup_{j=1}^{i} A_j\right) - P\left(\bigcup_{j=1}^{i-1} A_j\right) \underset{\text{טור טלסקופי}}{=} \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$

גבול טור = גבול סדרה

סכומים חלקיים