5/11/18

## הרצאה מס' 7 - טופולוגיה

**הוכחת משפט אינדוקציה לפי קשירות** - לכל $x\in X$ נגדיר $U_x=\bigcup_{\substack{U\in E\\ x\in U}} U$ (לא ריקה מסעיף ב')

$x,y\in X$ אם $U_x\cap U_y\neq\emptyset$ נגדיר $E_0$ כאוסף הבא- $E_0=\{U_x,U_y\}$. (שים ♡)

כי $U_x\in E$. נגדיר $E_0^x=\{U\in E \mid x\in U\}$, אזי $A,B\in E_0^x$ מתקיים $A\cap B\neq\emptyset$

כי $\{x\}\subset A,B$ ולכן הוא מקיים את תכונה (ב) ומהוכחה של משפט $\bigcup_{U\in E_0^x} U\in E$.

$E_0=\{U_x,U_y\}$ מקיים תנאי (ג) של משפט ולכן $x\in U_x\cup U_y\in E$ וזוהי קבוצה פתוחה

וכיוון ש- $x\in U_x\cup U_y$ מתקיים $U_x\cup U_y\in E_0^x$ ולכן קיבלנו $U_x\subset U_x\cup U_y\subset U_x$

ובאופן סימטרי נקבל כי $U_x\cup U_y=U_y$ ולכן $U_x=U_y$.

$U_x$ קבוצה פתוחה (איחוד של קבוצות פתוחות). וכעת נקבל פירוק, נבחר $a\in X$

ונגדיר $X=U_a\cup\underbrace{\left(\bigcup_{U_y\neq U_a} U_y\right)}_{\text{איחוד של קבוצות פתוחות} \Rightarrow \text{קבוצה פתוחה}}$

יש לנו פירוק של $X$ ל-2 קבוצות פתוחות זרות לכן אחת מהן ריקה, $a\in U_a$ ולכן $U_a\neq\emptyset$ וכיוון מקשירות של $X$ נקבל $U_a=X$.

**הגדרה:** מרחב $(X,\Omega)$ נקרא קשיר לחלוטין אם כל רכיב קשר הוא נק' אחת.

**דוגמה** - טופולוגיה דיסקרטית $(X,2^X)$, וגם תת-מרחב של $\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$ הוא קשיר לחלוטין, (טופולוגיה סטנדרטית משורה) הקבוצה של קנטור גם. $C\subset[0,1]$.

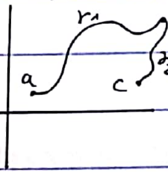
**הגדרה:** נגדיר $\varphi(X)=|\{x\in X: X\setminus\{x\}$ קשיר$\}|$ אם $X\sim Y$ $\Leftarrow$ $\varphi(X)=\varphi(Y)$

כיוון שקשירות זו תכונה טופולוגית. (הרבה אינווריאנטים טופולוגיים).

לדוגמה $\varphi(\mathbb{R})=0$, $\varphi([0,1))=1$, $\varphi([0,1])=2$, $\varphi(S^1)=\aleph$

### קשירות מסילתית

**הגדרה** - $(X,\Omega)$ מרחב טופולוגי. פונקציה רציפה $\gamma$ מ-$[0,1]$ ל-$X$ נקראת מסילה




$a=\gamma(0)$, $b=\gamma(1)$

**מסילה הפוכה** $\gamma^{-1}(t)=\gamma(1-t)$

**מכפלת מסילות** - $\gamma_1$ מסילה מ-a ל-b, $\gamma_2$ מסילה מ-b ל-c אז נגדיר $\gamma_1*\gamma_2(t)=\begin{cases}\gamma_1(2t) & 0\le t\le\frac{1}{2}\\ \gamma_2(2t-1) & \frac{1}{2}\le t\le 1\end{cases}$

מסילה מ-a ל-c ו- $(\gamma_1*\gamma_2)^{-1}=\gamma_2^{-1}*\gamma_1^{-1}$

כדי לבדוק שהיא רציפה, צ"ל רק מנק' $\frac{1}{2}$. $b\in U$

$$\gamma^{-1}(U)=\underbrace{(\gamma^{-1}(U)\cap[0,\tfrac{1}{2}])}_{\text{קב' פתוחה בטופולוגיה מושרית}}\cup\underbrace{(\gamma^{-1}(U)\cap[\tfrac{1}{2},1])}_{\text{קב' פתוחה בטופולוגיה מושרית}}$$

__הגדרה:__ מרחב $(X,\Omega)$ נקרא קשיר מסילתית אם לכל 2 נק' $a,b\in X$ קיימת מסילה מ-$a$ ל-$b$.

לדוגמא: $\mathbb{R}^n$ קשיר מסילתית, $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ גם קשיר מסילתית

- כל מרחב $(X,\Omega)$ קשיר מסילתית בהכרח הוא קשיר.

__הוכחה:__ יהיו $a,b\in X$ לפי הגדרה קשירות מסילתית, קיימת $\gamma$ כך ש-$\gamma\in C([0,1],X)$ , $\gamma(0)=a,\gamma(1)=b$ , $\gamma([0,1])$ קבוצה קשירה כי $[0,1]$ קבוצה קשירה כי זו תמונה של פונקציה רציפה של קבוצה קשירה. נניח $U_a$ זהו רכיב קשירות של נק' $a$. אז $a\in U_a\cap\gamma([0,1])\neq\emptyset$ והוכחנו שאיחוד של שני קבוצות קשירות שחיתוכן לא ריק זו קבוצה קשירה ולכן $U_a\cup\gamma([0,1])$ קבוצה קשירה ולכן $\gamma([0,1])\subset U_a$ ולכן $b\in U_a$ ו-$b$ שרירותי. סה"כ יש רק רכיב קשירות אחד.