

15/10/18

הרצאה נ' 1 - סופולוסיה

הצגה - יהי X קבוצה. $\Omega \subset \mathbb{R}^X$ (קבוצה סופולוסיה) אם:

$$(1) \quad \phi, X \in \Omega$$

$$(2) \quad U_\alpha U_\alpha \in \Omega \text{ או } U_\alpha \in \Omega \text{ (סדר סופי)} \quad (2)$$

$$(3) \quad U, V \in \Omega \text{ אז } U \cap V \in \Omega \text{ (סדר סופי)} \quad (3)$$

$U, V \in \Omega$ (קבוצה סופולוסיה)

$$X = \mathbb{R}^n \text{ או } \mathbb{R} \quad (1) \quad \text{סופולוסיה}$$

$$(2) \quad \Omega = \{\phi, X\}$$

$$(3) \quad \Omega = \mathbb{R}^X \text{ סופולוסיה בדיקה/דיוקטום}$$

$$(4) \quad \text{קו-סופולוסיה } U \subset X \text{ פתוחה אם } X \setminus U \text{ קבוצה סופולוסיה}$$

הצגה - $F \subset X$ סופולוסיה אם $X \setminus F \in \Omega$ (למעשה המושג קבוצה פתוחה)

$$\tilde{F} \subset \mathbb{R}^X \text{ סופולוסיה בדיקה/דיוקטום}$$

$$(1) \quad \phi, X \in \tilde{F}$$

$$(2) \quad \bigcap_{\alpha} F_\alpha \in \tilde{F} \text{ או } F_\alpha \in \tilde{F}$$

$$(3) \quad F \cup G \in \tilde{F} \text{ או } F, G \in \tilde{F}$$

הצגה - סופולוסיה $\mathbb{R}^2$ - $\mathbb{R}^2$ קבוצה $F \subset \mathbb{R}^2$ סופולוסיה אם קיים פונקציה P

$$F = \{(x, y) : P(x, y) = 0\}$$

הצגה - Ω סופולוסיה: יהי $\Omega \subset \mathbb{R}^X$ סופולוסיה. $\beta \subset \Omega$ (קבוצה סופולוסיה)

$$u = \bigcup_{v \in \beta} v \text{ אם } u \in \Omega \text{ קיימת } \Gamma \subset \beta \text{ כך ש-}$$

$\mathbb{R}$ - סופולוסיה (a, b) - סופולוסיה (a, b) - סופולוסיה (a, b) - סופולוסיה

הצגה - Ω סופולוסיה β - סופולוסיה β - סופולוסיה

$$u = \bigcup_{v \in \beta} v \text{ אם } u \in \Omega \text{ קיימת } \Gamma \subset \beta \text{ כך ש-}$$

$$(3) \quad x \in \bigcup_{v \in \beta} v \text{ אם } x \in \Omega \text{ קיימת } v \in \beta \text{ כך ש-}$$

הוכחה -

$$\Gamma = \{v \in \beta : v \subset u\} \quad \text{דבר 1, } 2=1.$$

$$- \text{אם } v \subset u \text{ אז } v \in \Gamma \text{ ולכן } u = \bigcup_{v \in \Gamma} v, \quad 1=2.$$

$$\bigcup_{v \in \Gamma} v \subset \bigcup_{\substack{v \in \beta \\ v \subset u}} v \Rightarrow u \subset \bigcup_{\substack{v \in \beta \\ v \subset u}} v$$

דבר 3, $3=2$, אם $x \in u$, אזי לפי סעיף 3, קיים $v \in \beta$ כך ש- $x \in v \subset u$.

$$x \in \bigcup_{\substack{v \in \beta \\ v \subset u}} v. \quad \text{לפי סעיף 3, קיים } u \text{ הכולל את } x \text{ ולכן } u \subset \bigcup_{\substack{v \in \beta \\ v \subset u}} v.$$

$$x \in u, \quad 2=3. \quad x \in u = \bigcup_{\substack{v \in \beta \\ v \subset u}} v, \quad \text{אם קיים } v \in \beta \text{ כך ש- } x \in v.$$

דבר 1 - אם β מקיים (1) $\bigcup_{v \in \beta} v = X$

(2) אם $v_1, v_2 \in \beta$ אז $v_1 \cap v_2 \in \beta$

אז קיטת סופולטיות של β כסוסטם.

הוכחה - אם β מקיים (1) $\bigcup_{v \in \beta} v = X$ אז $u = \bigcup_{v \in \Gamma} v$ אז $u \in \beta$ כי $\Gamma \subset \beta$ ולכן $u \in \beta$ ולכן $u \in \beta$ ולכן $u \in \beta$.

כי $u = \bigcup_{v \in \Gamma} v$ ולכן $u \in \beta$ ולכן $u \in \beta$ ולכן $u \in \beta$.

$$u_1 \cap u_2 = \left(\bigcup_{v \in \Gamma_1} v \right) \cap \left(\bigcup_{w \in \Gamma_2} w \right) = \bigcup_{\substack{v \in \Gamma_1 \\ w \in \Gamma_2}} (v \cap w) \in \beta$$

(לפי סעיף 3, קיים $v \in \beta$ הכולל את $v \cap w$)

השאלה של סופולטיות X β_1, β_2 סופולטיות, $\beta_1 \cup \beta_2$ יוגדר כ- $\beta_1 \cup \beta_2$ אם $\beta_1 \subset \beta_2$.

הסופולטיות הן אלו הכוללות את כל הסופולטיות של β_1 ו- β_2 והן הן β_1 ו- β_2 עצמן.

17/10/18

הוצאות מ' 2 - IC בולטית

משפט - נניח $\beta < 2^x$ מקומות גיבוי

$$\bigcup_{v \in \beta} v = X \quad (1)$$

$$V_1 \cap V_2 = \bigcup_{\substack{w \in V_1 \cap V_2 \\ w \in \beta}} w \quad (2)$$

אין קיינא גאנצער וועלט איז נאך ע-ב ביימס שולד.

[illegible]

$$\mathcal{U}_\phi = \phi \quad \text{c} = \Gamma = \phi \quad \text{p/c}$$

$$u_\beta = X \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma = \beta \text{ p.l.c.}$$

man ist $\bigcup_{\alpha \in A} \gamma_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} \gamma_\alpha$ ist $\gamma_\alpha, \gamma_\alpha \in \beta$

$$U_{P_1} = \bigcup_{V_1 \in P_1} V_1 \quad \text{d.h.} \quad : U_{P_1} \cap U_{P_2} \in \mathcal{R} - \mathcal{C} \quad \text{d.h.} \quad P_1 \subset \beta, P_2 \subset \beta$$

- maxim/priorile pe dipon si $u_{P_2} = \bigcup_{v_2 \in P_2} v_2$

$$U_{P_1} \cap U_{P_2} = \bigcup_{v_1 \in P_1} \bigcup_{v_2 \in P_2} (v_1 \cap v_2)^{\oplus}; \quad v_1 \in \beta_1, v_2 \in \beta_2 \Rightarrow v_1 \cap v_2 = \bigcup_{w \in P(v_1, v_2)} w$$

$$\Gamma(v_1, v_2) = \{w : w \in \beta, w \subset v_1 \cap v_2\} \text{ rel. } \omega$$

$$\textcircled{=} \quad \cup \quad \cup \quad \cup \quad \omega$$

$$v_1 \in \Gamma_1 \quad v_2 \in \Gamma_2 \quad \omega \in \Gamma(v_1, v_2)$$

$$u_{P_1} \cap u_{P_2} = \bigcup_{w \in P} w \quad \text{skt } \Gamma = \bigcup_{v_1 \in P_1, v_2 \in P_2} \Gamma(v_1, v_2) \subset \beta \quad (n_0, \infty)$$

- es gibt $u \in \beta_2$ mit $x \in u$ für $u \in \beta_1$ für $n \in \mathbb{N}$ $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_2$ - GELT

$$\Omega_2, \beta_2, \Omega_1, \beta_1 \text{ p i j h) } \text{verkn. } x \in U \subset \mathbb{C}$$

הוכחה: נניח $\beta_2 \in \mathcal{B}_2$ כסופים של סופרפולד β_2 וכן $\beta_1 \in \mathcal{B}_1$.

~~אין $\mathcal{C}$ קייט $x \in U$, $u = \bigcup_{V \in \mathcal{C}_x} V$ - קען זיין אז u איז נישט~~

$B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$ $\forall N'' \in S \cap \{ \alpha \in \beta_2 \}$

$w \subset u, w = \bigcup_{v \in B_2} v \quad \forall u \in \Omega_2 \quad \exists v \in B_1 \text{ (נקח) } u \in B_1$
 $\forall u \in \Omega_2 \quad \exists v \in B_1 \text{ (נקח) } u \in B_1$

$$- \text{for all } x \in W, y \in W, z \in W, u \in W, v \in W, w \in W, x \in V, y \in V, z \in V, u \in V, v \in V, w \in V$$

$B_1 \subset B_2$ מ"מ
 $A = \bigcup_{A \in \mathcal{B}_1} A$, $A \in \mathcal{B}_2$, $A \subset B_1$
 $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2$, $A \in \mathcal{B}_2$, $A \subset B_1$

דוגמה -
 $\mathcal{B}_2 = \{ [a, b) \subset \mathbb{R} : a < b \}$, $\mathcal{B}_1 = \{ (a, b) \subset \mathbb{R} : a < b \}$
 איחוד של קטעים חצי פתוחים וקטעים פתוחים.
 (שים לב כי $[a_1, b_1) \cap [a_2, b_2) = [c, d)$, $c = \max\{a_1, a_2\}$, $d = \min\{b_1, b_2\}$)
 $\mathcal{B}_2$ - יוצר סופולוגיה , $\mathcal{B}_1$ - יוצר סופולוגיה , $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2$

$$(a, b) = \bigcup_{b > c > a} [c, b)$$

כל קטע פתוח (a, b) הוא איחוד של קטעים חצי פתוחים $[c, b)$, $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2$
 (ניתן לבדוק שהקטעים סגורים - האם זהו כיסוי והאם יוצר סופולוגיה ואיחוד)
 דוגמה נוספת: $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2$, $\mathcal{B}_1$ - סופולוגיה , $\mathcal{B}_2$ - סופולוגיה
 אזי קיים c כך ש- $x \in [c, b) \subset (a, b)$, $a < c < x$

מרחב מטרי

יהי X קטע למטה, סוף $\rho: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, ρ (קריטריון מטרי) על X
 אם מתקיימים:

1. $\rho(x, y) \geq 0$, $\rho(x, y) = 0$ אם ורק אם $x = y$, $x, y \in X$
2. סמטריה: $\rho(x, y) = \rho(y, x)$, $x, y \in X$
3. $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(y, z)$: $x, y, z \in X$ (אי-טריוויאל)
 (מרחב מטרי)

(X, ρ) - מרחב מטרי

דוגמה - (1) $\mathbb{R}^2$ - $\rho_1(x, y) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

$\rho_1(x, y) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$ - ρ_2

$\rho_\infty(x, y) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$ - ρ_∞

$1 \leq p < \infty$, $\rho_p(x, y) = (|x_1 - x_2|^p + |y_1 - y_2|^p)^{1/p}$

(2) $\mathbb{R}^n$ - סדרה אינסופית

(3) X קטע למטה: $\rho(x, y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$

הסדר - אם (X, ρ) מרחב מטרי, אם $\sqrt{\rho}$ מטריקה. יש לכתוב רק אם $\Delta \leq 1$
 השאר כמנהג. d^3 אם $a \leq b+c$ אז $\sqrt{a} \leq \sqrt{b} + \sqrt{c}$ ופסגות אלו נכונות.
 אם $\sqrt{b+c} \leq \sqrt{b} + \sqrt{c}$ ואם ρ מטריקה.
 אם $\min\{\rho, 1\}$ אם ρ מטריקה.

הצבה - והמרחב מטרי (X, ρ) , יהי $a \in X$, $B_r(a) = \{x \in X : \rho(a, x) < r\}$, $r > 0$,
 כדור פתוח סביב a ברדיוס r .

$D_r(a) = \{x \in X : \rho(a, x) \leq r\}$ כדור סגור סביב a ברדיוס r .
 $S_r(a) = \{x \in X : \rho(a, x) = r\}$ סביבה סביב a ברדיוס r .

משפט (X, ρ) מרחב מטרי. $\beta = \{B_r(a) : r > 0, a \in X\}$ כוסים של סופולואיד (סמך של
 הוכחה - צריך לבדוק 2 גורמים -

(1) $\bigcup_{\substack{V \in \beta \\ a \in B_r(a) \\ r > 0}} V = X$ כל x יהיה ברדיוס r מסוים a מכאן a , נבחר r של

(2) יהיו $V_1, V_2 \in \beta$ צרכים להוכיח ש- $W = \bigcup_{\substack{w \in \beta \\ w \subset V_1 \cap V_2}} w$ (אלו להוכיח

שכל $x \in V_1 \cap V_2$ קיים $w \in \beta$ כזה ש- $w \subset V_1 \cap V_2$ ו- $x \in w$.

אם יש לנו $x \in B_{r_1}(a_1) \cap B_{r_2}(a_2)$ אספנו x וברדיוס מספיק קטן כך שהסדר

יהיה חצי מרחב של שני המרחבים.

$\Leftrightarrow \rho(x, a_1) < r_1 \Leftrightarrow x \in B_{r_1}(a_1), \rho(x, a_2) < r_2 \Leftrightarrow x \in B_{r_2}(a_2)$

אם קיים $\epsilon > 0$ כזה ש- $\rho(x, a_1) + \epsilon < r_1$ ו- $\rho(x, a_2) + \epsilon < r_2$ (אולי ע

$B_\epsilon(x) \subset B_{r_1}(a_1) \cap B_{r_2}(a_2)$ (אם כן) ויהי $z \in B_\epsilon(x)$ ונבחר $z \in B_{r_1}(a_1)$. $z \in B_\epsilon(x)$ כלומר
 $(= w)$

$\rho(z, a_1) < \rho(z, x) + \rho(x, a_1) < \epsilon + \rho(x, a_1) < r_1$ מכאן שיש $z \in B_{r_1}(a_1)$ וכן $z \in B_{r_2}(a_2)$ מכאן שיש $z \in B_{r_1}(a_1) \cap B_{r_2}(a_2)$.

הצבה - יהיו $(X, \rho_1), (X, \rho_2)$ שני מרחבים מטריים. נקבע $\rho_1 \sim \rho_2$ אם
 אם הם יוצרים אותו סופולואיד.

למשל, $\rho_1 \sim \rho_2$ אם $1 \leq \rho_1 \leq \rho_2$ קטן יותר סופולואיד קטן, ויש לנו כוסים
 של כדורים, יש מטריקה, מטריקה יוצרת כוסים - כל המרחבים של מטריקה זו יכסו יוצר סופולואיד

ואנחנו צריכים להראות - $\Omega_1 = \Omega_2$. למעשה צריך להראות - $\Omega_1 \subset \Omega_2$ ו- $\Omega_2 \subset \Omega_1$.
 - $\Omega_2 \subset \Omega_1$: אנחנו לוקחים נקודה כלשהי $x \in \Omega_2$ וצריכים להראות שהיא שייכת ל- Ω_1 .

לפי - $(X, \rho_1), (X, \rho_2)$ $c > 0$ לכל $x, y \in X$ $\rho_1(x, y) \leq c \rho_2(x, y)$
 כל $\Omega_1 \subset \Omega_2$

הוכחה - נניח $x \in \Omega_1$ ונראה ש- $x \in \Omega_2$. ניקח $r > 0$ ונראה ש- $B_r(x) \subset \Omega_2$.

נניח $a \in X$ ו- $r > 0$. נראה ש- $B_r(a) \subset \Omega_2$. ניקח $y \in B_r(a)$ ונראה ש- $y \in \Omega_2$.

נניח $\epsilon > 0$ ונראה ש- $\rho_1(x, a) + \epsilon < r$. ניקח $y \in X$ ונראה ש- $\rho_1(y, a) \leq \rho_1(y, x) + \rho_1(x, a) < r$.

כלומר, $\rho_1(y, a) \leq \rho_1(y, x) + \rho_1(x, a) < r$. ניקח $\epsilon > 0$ ונראה ש- $\rho_1(x, z) \leq c \rho_2(x, z) < c \cdot \frac{\epsilon}{c} = \epsilon$.

$c = \rho_1(x, z) \leq c \rho_2(x, z) < c \cdot \frac{\epsilon}{c} = \epsilon$ $c = \rho_2(z, x) < \frac{\epsilon}{c}$, $z \in B_{\frac{\epsilon}{c}}^{\rho_2}(x)$

$x \in B_{\frac{\epsilon}{c}}^{\rho_2}(x) \subset B_r^{\rho_1}(a)$ כלומר $z \in B_r^{\rho_1}(a)$
 " $\forall$ " $\forall$

האגדה - עבור כל $r > 0$ וכל $a \in X$ $B_r(a) \subset \Omega_1$ כלומר $\Omega_1 = \Omega_2$.

כלומר $\Omega_1 = \Omega_2$ כלומר $\Omega_1 = \Omega_2$.

אנחנו צריכים להראות ש- $\Omega_1 = \Omega_2$.