

טופולוגיה

© ארזים

28 בנובמבר 2016

1 אקסיומות ההפרדה

ניזכר באקסיומות:

1. X הוא T_1 אם לכל $x, y \in X$ שונים קיימות קבוצות פתוחות U, V כך שמתקיים $x \in U, y \in V, x \notin V, y \notin U$ (באופן שקול, יחידונים הם קבוצות סגורות).

2. X הוא T_2 אם לכל $x, y \in X$ שונים קיימות קבוצות פתוחות וזרות U, V כך שמתקיים $x \in U, y \in V$ (באופן שקול, האלכסון $\Delta \subseteq X \times X$ הוא קבוצה סגורה).

3. X הוא T_3 אם לכל $x \in X, A \subseteq X$ סגורה עם $x \notin A$ הן ניתנות להפרדה.

4. X הוא T_4 אם לכל שתי קבוצות סגורות וזרות, הן ניתנות להפרדה.

תרגיל יהי X מרחב טופולוגי, ויהי צט מרחב האוסדורף. יהיו $f, g \in C(X \rightarrow Y)$. אזי הקבוצה

$$C(f, g) = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$$

היא סגורה.

פתרון נתבונן בהעתקה

$$\begin{aligned} f \times g : X &\rightarrow Y \times Y \\ (f \times g)(x) &= (f(x), g(x)) \end{aligned}$$

כעת מתקיים

$$C(f, g) = (f \times g)^{-1}(\Delta)$$

ולכן סגורה - תמונה הפוכה של קבוצה סגורה על ידי פונקציה רציפה.

מסקנה 1.1 בתנאי התרגיל הקודם, אם $A \subseteq X$ צפופה, $f|_A = g|_A$, אזי $f = g$.

■ הוכחה: $A \subseteq C(f, g)$, ולכן $X = \overline{A} \subseteq C(f, g)$, ולכן $C(f, g) = X$.

תרגיל יהי X מרחב נורמלי, $f: X \rightarrow Y$ העתקה רציפה, סגורה ועל. אזי Y נורמלי.

פתרון יהיו $F_1, F_2 \subseteq Y$ סגורות וזרות. נקח $U_1, U_2 \subseteq X$ פתוחות וזרות שמפרידות בין $f^{-1}(F_1), f^{-1}(F_2)$. נסמן $V_1 = Y \setminus f(X \setminus U_1), V_2 = Y \setminus f(X \setminus U_2)$, ואלה פתוחות. נבדוק שאלה זרות.

נניח כי $f(X \setminus U_1), f(X \setminus U_2)$ קיים $x \in X$ עבורו $f(x) = y$, ולכן $x \in U_1 \cap U_2$ בסתירה. לכן הקבוצות V_1, V_2 זרות.

כעת נבדוק כי $F_1 \subseteq V_1$. יהי $y \in F_1$. אם $y \notin V_1$ אזי $y = f(x)$ כאשר $x \in X \setminus U_1$, אבל אז סתירה כי $f^{-1}(F_1) \subseteq U_1$. כך מוכיחים גם עבור $F_2 \subseteq V_2$.

2 אקסיומות המניה

ניזכר גם באקסיומות המניה:

1. X הוא S_1 אם לכל $x \in X$ יש קבוצות פתוחות $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \dots$ כך שמתקיים $x \in \bigcap B_i$ וכן אם U סביבה של x אזי יש i עבורו $B_i \subseteq U$.

2. X הוא S_2 אם קיים לו בסיס בן מניה.

3. X הוא ספרבילי אם יש בו תת קבוצה צפופה בת מניה.

הגדרה 2.1 יהי X מרחב טופולוגי. נגיד כי $\{x_n\} \subseteq X$ מתכנסת אל $x \in X$ אם לכל סביבה U של x יש $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq N$ מתקיים $x_n \in U$.

תרגיל אם X הוא האוסדורף, אז לכל סדרה יש לכל היותר גבול אחד.

■ **הוכחה:** נניח כי $x_n \rightarrow x, x' \neq x, x_n \rightarrow x'$. ניקח $x \in U', x \in U$ כאשר U, U' פתוחות וזרות. החל ממקום מסוים $x_n \in U, U'$, ולכן גם $x_n \in U \cap U'$.

דוגמא נתבונן במרחב $X = \mathbb{R}$ עם הטופולוגיה הקו־סופית, ובסדרה $x_n = n$. אזי כל $x \in \mathbb{R}$ הוא גבול של הסדרה - בהינתן $x \in \mathbb{R}$, U סביבה של x , ברור כי פרט למספר סופי של n , מתקיים $x_n \in U$.

הגדרה 2.2 עבור $A \subseteq X$ נסמן בתור $S(A)$ את אוסף כל הגבולות של סדרות מתוך A .

תרגיל

$$1. S(A) \subseteq \overline{A}$$

$$2. \text{ אם } X \text{ הוא } S_1, \text{ אזי } S_1(A) = \overline{A}.$$

פתרון

1. בהינתן $x \in S(A)$, ניקח $x_n \rightarrow x$, ואז אם U סביבה של x , U מכילה איברים מתוך x_n ובפרט חותכת את A .

2. יהי $\bar{A}$ נקח $x \in \bar{A}$, נקח $x_i \in B_i \cap A$, ונטען כי $x_i \rightarrow x$. תהי U סביבה של x . יש i כך שמתקיים $B_i \subseteq U$, ולכן לכל $j > i$ מתקיים

$$x_j \in B_j \cap A \subseteq B_i \cap A \subseteq U$$

הגדרה 2.3 $f : X \rightarrow Y$ רציפה סדרתית אם לכל $x_n \rightarrow x$ בתוך X , $f(x_n) \rightarrow f(x)$ בתוך Y .

תרגיל אם f רציפה אז היא רציפה סדרתית. אם X הוא S_1 וכן f רציפה סדרתית אזי f רציפה.

פתרון ראשית, תהי $x_n \rightarrow x$, ותהי V סביבה של $f(x)$. אזי $f^{-1}(V)$ סביבה של x , ולכן עבור $n < N$ מתקיים $x_n \in f^{-1}(V)$, כלומר $f(x_n) \in V$. נבדוק שלכל $A \subseteq X$ מתקיים $\overline{f(A)} \subseteq f(\bar{A})$. יהי $y \in \overline{f(A)}$. כלומר $y = f(x)$ באשר $x \in \bar{A}$, ומהתרגיל הקודם יש $x_n \in A$ עם $x_n \rightarrow x$, ואז $f(x_n) \rightarrow f(x)$, וכמוכן $f(x_n) \in f(A)$, כלומר

$$y = f(x) \in \overline{f(A)}$$

דוגמא ניקח את $\mathbb{R}$ עם הטופולוגיה הקובית מניה, כלומר קבוצה היא פתוחה אם המשלים שלה בן מניה. נקח סדרה $\{x_n\}$, ונגדיר $U = \mathbb{R} \setminus \{x_n\}$. אם $x \in U$ אז בבירור $x_n \not\rightarrow x$. תרגיל - הראו כי $x_n \rightarrow x$ אם ורק אם $x_n = x$ החל ממקום מסוים. כלומר בטופולוגיה זו $S(A) = A$ לכל A . העתקת הזהות ממרחב זה למרחב $\mathbb{R}$ עם הטופולוגיה הסטנדרטית, היא רציפה סדרתית (כי כל סדרה מתכנסת היא קבועה ממקום מסוים), אבל לא רציפה (תמונה הפוכה של קבוצה פתוחה לא תהיה דווקא פתוחה).

הגדרה 2.4 סדרה חלקית מכוונת אם לכל $\alpha, \beta \in J$ יש $\gamma \in J$ כך שמתקיים $\alpha, \beta \leq \gamma$. רשת במרחב X היא העתקה $f : J \rightarrow X$. מתי רשת מתכנסת לנקודה x ? אם לכל U סביבה של x יש $\alpha \in J$ כך שלכל $\beta \geq \alpha$ מתקיים $f(\beta) \in U$.

מתקיים: $x \in \bar{A}$ אם ורק אם יש רשת של איברים מתוך A שמתכנסת אל x . כיוון אחד הוא קל. בהינתן $x \in \bar{A}$ ניקח J שהיא קבוצת הסביבות של x , ונגדיר $U \leq V$ אם $V \subseteq U$. כעת, פונקציית בחירה, מסביבה U לנקודה $x_u \in U$, תהיה רשת שמתכנסת אל x .