

טופולוגיה

© ארזים

15 בנובמבר 2016

נוכיח שיש אינסוף ראשוניים. **הוכחה:** נגדיר טופולוגיה על $\mathbb{Z}$ באופן הבא: נגדיר

$$B_{a,d} = \{a + nd \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

ואז נגדיר

$$\mathcal{B} = \{B_{a,d} \mid a \in \mathbb{Z}, d \in \mathbb{N}\}$$

זהו בסיס. מדוע? ניקח $B_{a_1,d_1}, B_{a_2,d_2} \in \mathcal{B}$ וניקח $z \in B_{a_1,d_1} \cap B_{a_2,d_2}$, ונרצה להראות כי $z \in B_{z,d_1d_2} \subseteq B_{a_1,d_1} \cap B_{a_2,d_2}$. נחשב:

$$z + md_1d_2 = a_1 + n_1d_1 + md_1d_2 = a_1 + (n_1 + md_2)d_1 \in B_{a_1,d_1}$$

באותו אופן נשיג שייכול לנחתך השני.

כעת נשים לב כי $B_{a,d}$ סגורות:

$$B_{a,d}^c = \bigcup_{b \neq a} B_{b,d}$$

כעת נתבונן בקבוצה $(\mathbb{P})$ היא קבוצת הראשוניים):

$$A := \bigcup_{p \in \mathbb{P}} B_{0,p}$$

נרצה לטעון כי $A^c = \{-1, 1\}$. בבירור $-1, 1$ לא בתוך A , אבל כל מספר אחר מתחל בראשוני כלשהו, ולכן יופיע בסדרה $B_{0,p}$ של הראשוני הזה. אם יש כמות סופית של ראשוניים, אז A סגורה, ולכן $\{-1, 1\}$ פתוחה, בסתירה - כל קבוצה פתוחה היא אינסופית. ■

1 סגירות

הגדרה 1.1 במרחב טופולוגי (X, τ) , נגדיר על תת מרחב $A \subseteq X$ טופולוגיה:

$$\tau_A = \{A \cap U \mid U \in \tau\}$$

הגדרה 1.2 אם $A \subseteq X$, נגדיר $\bar{A} \subseteq X$, הסגור של A , שהיא הקבוצה הסגורה הכי קטנה שמכילה את A , או חיתוך כל הסגורות שמכילות את A .
 ראינו כי $x \in \bar{A}$ אם ורק אם לכל סביבה U של x מתקיים $U \cap A \neq \emptyset$.

טענה 1.3 אם $B \subseteq A \subseteq X$ מרחב טופולוגי, אזי

$$\bar{B}^A = \bar{B}^X \cap A$$

הוכחה: ניקח $y \in \bar{B}^A$, אזי $y \in A$. נקח $U \subseteq X$ פתוחה עם $y \in U$. נרצה להראות כי $A \cap U \cap B \neq \emptyset$. אבל $y \in A \cap U$, כלומר U סביבה של y בתוך A . לכל $U \cap B \neq \emptyset$ כלומר $U \cap B \neq \emptyset$.
 כעת ניקח $y \in \bar{B}^X \cap A$. ניקח סביבה U של y בתוך A , כלומר $y \in A \cap U$. יש להראות כי $A \cap U \cap B \neq \emptyset$. אבל $U \cap B \neq \emptyset$ ולכן $A \cap U \cap B = U \cap B \neq \emptyset$. ■

2 מרחבי מכפלה

ניזכר שהגדרנו טופולוגיה על $X \times Y$, עבור X, Y מרחבים טופולוגיים, על ידי הבסיס $\{U \times V \mid U \in \tau_X, V \in \tau_Y\}$.

טענה 2.1 יהיו X, Y מרחבים טופולוגיים, $A \subseteq X, B \subseteq Y$. אזי

$$\overline{A \times B} = \bar{A} \times \bar{B}$$

הוכחה: נראה שהקבוצה $\bar{A} \times \bar{B}$ קבוצה סגורה:

$$X \times Y \setminus \bar{A} \times \bar{B} = X \setminus \bar{A} \times Y \cup X \times Y \setminus \bar{B}$$

מתקיים כמובן $A \times B \subseteq \bar{A} \times \bar{B}$, ולכן

$$\overline{A \times B} \subseteq \overline{\bar{A} \times \bar{B}} = \bar{A} \times \bar{B}$$

כעת יהי $(x, y) \in \bar{A} \times \bar{B}$. נקח סביבה Ω של (x, y) בתוך $A \times B$. בהכרח קיימים $U \subseteq X, V \subseteq Y$ כך שמתקיים

$$(x, y) \in U \times V \subseteq \Omega$$

$U \cap A \neq \emptyset$ ולכן $x \in U, x \in \bar{A}$. מאותה סיבה $V \cap B \neq \emptyset$, ולכן $y \in V, y \in \bar{B}$.
 לכן $(x, y) \in \bar{A} \times \bar{B}$, כלומר $\Omega \cap A \times B \neq \emptyset$. ■

הגדרה 2.2 יהי X מרחב טופולוגי ויהי $A \subseteq X$. נקראת צפופה אם $\bar{A} = X$.

טענה 2.3 A צפופה אם ורק אם A חותכת כל קבוצה פתוחה.

הוכחה: נניח כי A חותכת כל קבוצה פתוחה. יהי $x \in X$ ותהי U סביבה שלו. אזי מהתנאי $A \cap U \neq \emptyset$ ולכן $\bar{A} = X$.
 נניח כי A צפופה, ונניח שיש קבוצה פתוחה U שלא נחתכת עם A . מקח $x \in U$. אזי U סביבה של x , שזרה לקבוצה A , ולכן $x \notin \bar{A}$, בסתירה. ■

דוגמא אם X קבוצה אינסופית עם טופולוגיה קו סופית (כל קבוצה שהמשלים שלה סופי פתוחה), אזי כל תת קבוצה פתוחה צפופה - ניקח קבוצה פתוחה U ועוד קבוצה פתוחה V , ונרצה להראות שהחיתוך אינו ריק, אבל

$$(U \cap V)^c = U^c \cup V^c$$

וזה סופי, ולכן לא כל X .

לבסוף, יש לנו הסבר על תורת הקטגוריות. זה דורש המון ציורים, ודיאגרמות מתחלפות, ונועד בעיקר לאינטואיציה לא פורמלית, כלשון המתרגל.