

טופולוגיה

© ארזים

7 בנובמבר 2016

הגדרה 0.1 שתי מטריקות d_1, d_2 על המרחב X נקראות שקולות אם $U \subseteq (X, d_1)$ פתוחה אם ורק אם $U \subseteq (X, d_2)$ פתוחה.

טענה 0.2 נניח שקיימים $c, C > 0$ כל שלכל $x, y \in X$ מתקיים

$$cd_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq Cd_1(x, y)$$

אזי d_1, d_2 שקולות.

הוכחה: תהא $U \subseteq (X, d_1)$ פתוחה, ויהי $x \in U$. לכן קיים $r > 0$ כך שמתקיים $B_r^{d_1}(x) \subseteq U$. נראה כי קיים $r' > 0$ עבורו $B_{r'}^{d_2}(x) \subseteq B_r^{d_1}(x)$. תהי $y \in B_{r'}^{d_2}(x)$, אזי

$$\begin{aligned} cd_1(x, y) &\leq d_2(x, y) \leq r' \\ d_1(x, y) &\leq \frac{r'}{c} = r \end{aligned}$$

בחרנו $r' = rc$. הראינו כי U פתוחה לפי d_2 . כעת, מסימטריות התנאי, נובע הכיוון השני:

$$\frac{1}{C}d_2(x, y) \leq d_1(x, y) \leq \frac{1}{c}d_2(x, y)$$

■

הגדרה 0.3 יהי (X, d) מרחב מטרי, ויהיו $A \subseteq X, x \in X$. נגדיר

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y)$$

טענה 0.4 1.

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$$

2. אם A סגורה,

$$d(x, A) = 0 \iff x \in A$$

הוכחה:

1. נקח $\varepsilon > 0, z \in A$ כך שמתקיים

$$d(y, A) + \varepsilon > d(y, z)$$

אזי מתקיים

$$d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, z) - d(y, z) + \varepsilon \leq d(x, y) + \varepsilon$$

וזאת לכל $\varepsilon > 0$, לכן

$$d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y)$$

את אי השוויון השני ניתן לראות בצורה סימטרית.

2. נניח כי A סגורה. אם $x \in A$ אזי $d(x, A) = 0$ מההגדרה. כעת נניח כי $d(x, A) = 0$ וכן כי $x \notin A$. אז יש $r > 0$ כך שמתקיים $B_r(x) \subseteq X \setminus A$. מצד שני יש $y \in A$ כך שמתקיים $d(x, y) < r$, וזו סתירה.

■

הגדרה 0.5 זוג (X, Ω) כאשר $\Omega \subseteq 2^X$ נקרא מרחב טופולוגי אם מתקיימים הבאים:

1. לכל $U_i \in \Omega$ מתקיים $\bigcup U_i \in \Omega$.

2. לכל $U_1, \dots, U_n \in \Omega$ מתקיים

$$\bigcap_{i=1}^n U_i \in \Omega$$

3. $X, \emptyset \in \Omega$.

הגדרה 0.6 קבוצה $A \in \Omega$ נקראת פתוחה. קבוצה B עבורה $X \setminus B \in \Omega$ נקראת סגורה.

הגדרה 0.7 יהי (X, Ω) מרחב טופולוגי. Ω נקראת מטריזבילית אם קיימת מטריקה d על X כל שקבוצת הקבוצות הפתוחות לפי d היא בדיוק Ω . במצב זה אומרים כי d משרה את Ω .

דוגמאות

1. הטופולוגיה הדיסקרטית - כל הקבוצות פתוחות - $\Omega = 2^X$. טופולוגיה זו מושרית מהמטריקה הדיסקרטית.

2. X קבוצה, $\Omega = \{X, \emptyset\}$.

3. נגדיר $X = \mathbb{R} \cup \{0'\}$. קבוצות של Ω הן קבוצות מהצורה $V \cup \{0'\}$ אם $V \subseteq \mathbb{R}$ פתוחה עבורה $0 \in V$, או $U \subseteq \mathbb{R}$ פתוחה עבורה $0 \notin U$.

טענה 0.8 הדוגמא האחרונה היא של טופולוגיה לא מטריזבילית, והטופולוגיה $\Omega = \{\emptyset, X\}$ אינה מטריזבילית אם $|X| \geq 2$.

הוכחה: נתחיל מהחלק השני. נניח כי d משרה את Ω הזו. נקח $x, y \in X$ שונים, ונקבל $d(x, y) = r > 0$. אזי $B_{\frac{r}{2}}(x)$ היא קבוצה פתוחה שאינה X או $\emptyset$. בחלק הראשון, שוב נניח כי d משרה את Ω הזו. אזי $d(0, 0') = r > 0$. אזי $B_{\frac{r}{2}}(0) \subseteq X$ פתוחה, שמכילה את 0 ולא את $0'$. זה לא ייתכן לפי הבנייה, בסתירה. ■

הגדרה 0.9 קבוצה $B \subseteq 2^X$ נקראת בסיס אם Ω שמוגדרת להיות כל האיחודים של קבוצות מתוך B היא טופולוגיה.

טענה 0.10 B בסיס אם ורק אם מתקיימים שני התנאים הבאים:

1.

$$\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X$$

2. לכל $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, החיתוך $B_1 \cap B_2$ הוא איחוד של קבוצות מתוך B .

דוגמאות במרחב מטרי (X, d) , אוסף כל הכדורים הפתוחים הם בסיס לטופולוגיה המטרית. למשל, אוסף כל הדיסקים הפתוחים במישור, אוסף כל הריבועים הפתוחים שצלעותיהם מקבילות לצירים, ואוסף כל הריבועים שצלעותיהם בזווית $\frac{\pi}{4}$ עם הצירים, כל אחד בפני עצמו הוא בסיס (כדורים פתוחים לפי מטריקות p).