

# טופולוגיה

© ארזים

23 בנובמבר 2016

## 1 אקסיומות המניה

**הגדרה 1.1** יהי  $X$  מרחב טופולוגי, ויהי  $x \in X$ . אוסף קובצות פתוחות  $\{U_i\}_{i \in I}$  נקרא בסיס לפתוחות של  $x$  אם לכל קבוצה פתוחה  $V$  המכילה את  $x$ , קיים  $i$  כך שמתקיים  $x \in U_i \subseteq V$ .

**אקסיומת המניה הראשונה**  $X$  מקיים את אקסיומת המניה הראשונה אם לכל נקודה  $x \in X$  יש בסיס בן מניה לפתוחות של  $x$ .

**אקסיומת המניה השנייה**  $X$  מקיים את אקסיומת המניה השנייה אם קיים בסיס בן מניה היוצר את הטופולוגיה.

**הגדרה 1.2** מרחב טופולוגי  $X$  נקרא ספרבילי אם יש תת קבוצה צפופה של  $X$  שהיא בת מניה.

**טענה 1.3** אקסיומת המניה השנייה גוררת ספרביליות.

**הוכחה:** נניח  $X$  מקיים את אקסיומת המניה השנייה. יהיו  $\{U_i\}_{i=1}^\infty$  בסיס בין מניה, וניקח  $x_i \in U_i$ . אזי  $\{x_i\}$  צפופה בתוך  $X$ , שכן אם  $U$  פתוחה אזי יש  $i$  כך שמתקיים  $x_i \in U_i \subseteq U$ . ■

## דוגמאות

1. כל מרחב מטרי מקיים את אקסיומת המניה הראשונה - ניקח את  $\{B_r(x) \mid r \in \mathbb{Q}_+\}$ , וזהו בסיס לפתוחות של  $x$ .

2.  $\mathbb{R}^n$  מקיים את אקסיומת המניה השנייה, על ידי הבסיס  $\{B_r(x) \mid x \in \mathbb{Q}^n, r \in \mathbb{Q}_+\}$ .

3.  $l_2(\mathbb{R}) = \{(x_i)_{i=1}^\infty \mid x_i \in \mathbb{R}, \sum x_i^2 < \infty\}$  עם מטריקת  $d_2$  - מרחב זה מקיים את אקסיומת המניה השנייה.

4.  $l_\infty(\mathbb{R}) = \{(x_i)_{i=1}^\infty \mid x_i \in \mathbb{R}, \sup_i |x_i| < \infty\}$  עם מטריקת  $d_\infty$  - מרחב זה אינו ספרבילי: לכל  $F \subseteq \mathbb{N}$  נגדיר  $x_F \in l_\infty(\mathbb{R})$  כך ידי

$$x_F(n) = \begin{cases} 1 & n \in F \\ 0 & n \notin F \end{cases}$$

אם  $F_1, F_2 \subseteq \mathbb{N}$ , אז אם  $F_1 \neq F_2$  יש בלי הגבלת הכלליות  $i \in F_2 \setminus F_1$ , ולכן

$d(x_{F_1}, x_{F_2}) = 1$  וכן  $\{x_F\}$  אינה בת מניה,  $x_{F_1}(i) = 0, x_{F_2}(i) = 1$  אם הייתה קבוצה צפופה  $\{y_i\} \subseteq l_\infty(\mathbb{R})$  אזי  $\bigcup B_{\frac{1}{4}}(y_i) = l_\infty(\mathbb{R})$ , אחרת יש  $x$  שלא באיחוד הזה, ואז  $B_{\frac{1}{4}}(x)$  לא חותך את  $\{y_i\}$  בסתירה לצפיפות של  $y_i$ .  
אם היא הייתה בת מניה, בנינו קבוצה לא בת מניה  $\{x_F\}$  כך שהמרחק בין כל שתי נקודות בה הוא 1. לכן בכל כדור ברדיוס  $\frac{1}{4}$  יש לכל היותר איבר יחיד מתוך  $\{x_F\}$ , וזו סתירה.

**טענה 1.4** מרחב רגולרי המקיים את אקסיומת המניה השנייה הוא נורמלי.

**הוכחה:** תהייה  $A, B$  קבוצות סגורות זרות, ויהי  $B$  בסיס בן מניה. לכל  $a \in A$  מקתיים  $a \in X \setminus B$ , ולכן יש  $U_a$  פתוחה כך שמתקיים  $U_a \subseteq \overline{U_a} \subseteq X \setminus B$ .  $a \in U_a \subseteq \overline{U_a} \subseteq X \setminus B$  לכן יש  $\{U_i\}_{i=1}^\infty$  כיסוי של  $A$ , עם  $\overline{U_i} \cap B = \emptyset$ , וכמו כן יש  $\{V_i\}_{i=1}^\infty$  כיסוי של  $B$ , עם  $\overline{V_i} \cap A = \emptyset$ . כעת נגדיר

$$S_k = U_k \setminus \bigcup_{i=1}^k \overline{V_i}, T_k = V_k \setminus \bigcup_{i=1}^k \overline{U_i}$$

גם  $T_k, S_k$  פתוחות, ולכן גם

$$O = \bigcup_{k=1}^\infty S_k, P = \bigcup_{k=1}^\infty T_k$$

גם כן פתוחות. כיוון שמתקיים  $A \subseteq \bigcup U_i$  וכן  $\overline{V_i} \cap A = \emptyset$  מתקיים  $A \subseteq O$ . באותה צורה  $B \subseteq P$ .  
כעת כמובן  $O, P$  זרות, כיוון שאחרת יש  $n, m$  כך שמתקיים  $T_n \cap S_m \neq \emptyset$  אם  $n \geq m$ .  
לא יכול להיות  $T_n \cap S_m \neq \emptyset$ , ואותו הדבר אם  $m \geq n$ . ■

## 1.1 משפט המטריזציה של אוריסון

**הגדרה 1.5** מרחב טופולוגי  $(X, \tau)$  נקרא מטריזבילי אם יש מטריקה על  $X$  המשרה את  $\tau$ .

**הערה 1.6** אם  $(X, \tau)$  הוא מטריזבילי אזי כל תת מרחב (כלומר תת קבוצה עם הטופולוגיה המושרה) הוא גם מטריזבילי.

**הערה 1.7** (תרגיל)  $[0, 1]^{\mathbb{N}}$  עם טופולוגיית המכפלה הוא מרחב מטריזבילי, על ידי המטריקה

$$d((x_i)_{i=1}^\infty, (y_i)_{i=1}^\infty) = \sum_{i=1}^\infty \frac{|x_i - y_i|}{2^i}$$

**משפט 1.8** משפט (משפט המטריזציה של אוריסון) אם  $X$  מרחב  $T_3$  ומקיים את אקסיומת המניה השנייה, אזי  $X$  מטריזבילי.

**הוכחה:** נראה שבתנאים אלה  $X$  הומיאומורפי לתת קבוצה  $E$  של  $[0, 1]^{\mathbb{N}}$  עם טופולוגיית המכפלה. אכן, אם  $f : X \rightarrow E$  הוא כזה הומיאומורפיזם, הרי  $E$  מטריזבילי, ולכן

$$d_X(x, y) = d_E(f(x), f(y))$$

היא מטריקה על  $X$  המשרה את הטופולוגיה. יהי  $B$  בסיס בן מניה של  $X$ . לכל זוג קבוצות  $U, V$  בבסיס המקיימות  $\bar{U} \subseteq V$  מתקיים  $\bar{U}, X \setminus V$  קבוצות סגורות וזרות. מהלמה של אוריסון, יש  $f : X \rightarrow [0, 1]$  רציפה כך שמתקיים  $f(\bar{U}) = 0, f(X \setminus V) = 1$ . קיבלנו אוסף בן מניה של פונקציות רציפות  $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ . נגדיר העתקה

$$\begin{aligned} F : X &\rightarrow [0, 1]^{\mathbb{N}} \\ F(x) &= (f_1(x), f_2(x), \dots) \end{aligned}$$

**טענה 1.9** לכל  $x \in X$  ולכל  $C$  סגורה כך שמתקיים  $x \notin C$  קיים  $n$  כך שמתקיים  $f_n(C) = 0, 1$ .  $f_n(x) = 0, 1$

**הוכחה:**  $x \in X \setminus C$ , שהיא פתוחה, וכן  $X$  הוא  $T_3$ . לכן יש  $V_1$  פתוחה בבסיס כך שמתקיים  $x \in V_1 \subseteq \bar{V}_1 \subseteq X \setminus C$  ולכן קיימת  $V_2$  בבסיס עבורה

$$x \in V_2 \subseteq \bar{V}_2 \subseteq V_1 \subseteq \bar{V}_1 \subseteq X \setminus C$$

■ כעת  $V_1, V_2$  בבסיס,  $\bar{V}_2 \subseteq V_1$ , ולכן קיים  $n$  מתאים.

כעת נוכיח כי  $F$  הומיאומורפיזם. חד-חד-ערכיות: יהיו  $x \neq y$ . לפי הטענה (היות והסינגלטונים הם קבוצות סגורות), יש  $n$  כך שמתקיים  $f_n(x) = 0, f_n(y) = 1$  ולכן  $F(x) \neq F(y)$ . רציפות: ניקח איבר תת בסיס עבור  $V = U \times [0, 1] \times [0, 1] \times \dots$ , עבור  $U \subseteq [0, 1]$  פתוחה, אזי  $F^{-1}(V)$  היא למעשה  $f_1^{-1}(U)$  ומרציפות  $f_1$  זו קבוצה פתוחה. רציפות ההופכית: למעשה צריך להראות כי אם  $U$  פתוחה בתוך  $X$ , אזי  $F(U)$  פתוחה בתוך  $F(X)$ . כלומר צריך להראות כי יש  $V$  פתוחה בתוך  $[0, 1]^{\mathbb{N}}$  כך שמתקיים  $F(U) = F(X) \cap V$ . נסמן  $\pi_1 : [0, 1]^{\mathbb{N}} \rightarrow [0, 1]$  ההטלה על הקואורדינטה  $i$ . אזי כמובן  $f_i = \pi_i \circ F$ , ולכן  $f^{-1}(O) = F^{-1}(\pi_i^{-1}(O))$  לכל  $O \subseteq [0, 1]$ . כעת, תהי  $U$  פתוחה בתוך  $X$ . יהי  $x \in U$ . מהטענה, יש  $n(x)$  כך שמתקיים  $f_{n(x)}(X \setminus U) = 1, f_{n(x)}(x) = 0$ . לכן מתקיים

$$x \in f_{n(x)}^{-1}([0, 1)) \subseteq U$$

ומכאן מתקיים

$$U = \bigcup_{x \in U} f_{n(x)}^{-1}([0, 1)) = \bigcup_{x \in U} F^{-1}(\pi_{n(x)}^{-1}([0, 1)))$$

לכן מתקיים

$$F(U) = \left( \bigcup_{x \in U} \pi_{n(x)}^{-1}([0, 1]) \right) \cap F(X)$$

זו קבוצה פתוחה מתוך  $[0, 1]^{\mathbb{N}}$  בחיתוך עם  $F(X)$ .  
בסך הכל, סיימנו.

■

## 2 קשירות

**הגדרה 2.1** מרחב טופולוגי  $X$  נקרא קשיר אם אין  $U, V$  לא ריקות, פתוחות וזרות כך שמתקיים  $X = U \cup V$ .

תת קבוצה  $E \subseteq X$  היא קשירה אם המרחב הטופולוגי המושרה על  $E$  קשיר.

**הערה 2.2** מרחב טופולוגי הוא קשיר אם ורק אם אין  $C, D$  לא ריקות, סגורות וזרות כך שמתקיים  $X = C \cup D$ .

**טענה 2.3** מרחב טופולוגי  $X$  קשיר אם ורק אם לר קיימת  $f : X \rightarrow \{0, 1\}$ , כאשר על  $\{0, 1\}$  יש את הטופולוגיה הדיסקרטית, שהיא רציפה ועל (כלומר לא קבועה).

**הוכחה:** אם יש כזו פונקציה אזי  $X = f^{-1}(\{1\}) \cup f^{-1}(\{0\})$  ולכן לא קשיר.  
אם  $X$  לא קשיר, ונניח כי  $X = U \cup V$  ניקח  $f|_V = 1, f|_U = 0$ .

■

### דוגמאות

1. המרחב  $[a, b] \cup [c, d]$  עבור  $a < b < c < d$  לא קשיר.

2.  $\mathbb{Q}$  לא קשיר:  $\mathbb{Q} = ((-\infty, \pi) \cap \mathbb{Q}) \cup ((\pi, \infty) \cap \mathbb{Q})$ .

**טענה 2.4** אם  $X$  קשיר וכן  $f : X \rightarrow Y$  רציפה ועל,  $Y$  קשיר.

**הוכחה:** אחרת  $Y = U \cup V$  ואז  $X = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$ .

■

**מסקנה 2.5** קשירות נשמרת תחת הומיאומורפיזם.

**תרגיל**  $\mathbb{R}$  אינו הומיאומורפי אל  $\mathbb{R}^2$ .

**למחשבה** האם  $\mathbb{R}^2$  הומיאומורפי אל  $\mathbb{R}^3$ .

**דוגמא**  $(0, 1)$  אינו הומיאומורפי אל  $[0, 1]$ , שכן אם היה הומיאומורפיזם כזה, אזי  $f(0) = f([0, 1] \setminus \{0\}) \cup \{f(0)\} = f([0, 1] \setminus \{0\}) \cup \{f(0)\}$ .

**טענה 2.6** אם  $X$  מרחב טופולוגי לא קשיר וכן  $X = U \cup V$ , עם תת קבוצה  $A \subseteq X$  תת קבוצה קשירה, אזי  $A \subseteq U$  או  $A \subseteq V$ , אך לא שניהם.

**הוכחה:** בלי הגבלת הכלליות  $A \cap U \neq \emptyset$ . אם גם  $V \cap A \neq \emptyset$  אזי  $A = (U \cap A) \cup (V \cap A)$  סתירה לקשירות של  $A$ . ■

**טענה 2.7** תת קבוצה של  $\mathbb{R}$  בטופולוגיה הסטנדרטית היא קשירה אם ורק אם היא קטע במובן הרחב (קטע פתוח, סגור, חצי פתוח וחצי סגור, או קרן אינסופית פתוחה או סגורה).

**הוכחה:** נניח כי  $A \subseteq \mathbb{R}$  קשירה, אזי לכל  $a \neq b \in A$  עם  $a < b$ , אזי לכל  $a < c < b$  מתקיים  $c \in A$  - אחרת  $A = ((-\infty, c) \cap A) \cup ((c, \infty) \cap A)$  סתירה לקשירות. לכן  $A$  היא הקטע שקצותיו הם  $\inf_{a \in A} a, \sup_{a \in A} a$ .  
 כעת נראה את הכיוון השני עבור הקטע הסגור: נכתוב  $[a, b] = U \cup V$ , כאשר  $U, V$  קבוצות לא ריקות, זרות ופתוחות. בלי הגבלת הכלליות מתקיים  $a \in U$ . נסמן  $S = \{x \in [a, b] \mid [a, x] \subseteq U\}$ . כעת נסמן  $m = \sup S$ . כעת  $a < m$  (כי חייב להיות קטע שמוכל בתוך  $U$ , כי  $U$  פתוחה). כמו כן,  $m \notin U$ , כי אחרת רק יכול להיות  $m = b$ , ואז  $V = \emptyset$ . ■

**משפט 2.8** (משפט ערך הביניים) אם  $X$  מרחב טופולוגי קשיר, עם פונקציה  $f : X \rightarrow [0, 1]$  רציפה, בהינתן  $x, y \in X$  עם  $f(x) < f(y)$ , אזי לכל  $t$  עם  $f(x) < t < f(y)$  קיים  $z \in X$  עבורו  $f(z) = t$ .

**הוכחה:**  $f$  רציפה, ועל תמונתה, ולכן כיוון שהמרחב  $X$  קשיר, גם  $f(X)$  קשיר, ולכן קטע. ■

## 2.1 קשירות של איחוד ומכפלה

**טענה 2.9** אם  $A \subseteq X$  קשיר אז גם  $\bar{A}$  קשיר.

**הוכחה:** אם  $\bar{A} = C \cup D$ , כאשר  $C, D$  סגורות וזרות, אז בלי הגבלת הכלליות  $A \cap C \neq \emptyset$  וזאת  $A \subseteq C$ , כלומר  $D = \emptyset$  - כי אחרת  $A = (C \cap A) \cup (D \cap A)$  בסתירה לקשירות של  $A$ . ■

**טענה 2.10** (טענת הכוכב) אם  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$  קשירות ויש  $\beta \in I$  כך שמתקיים לכל  $\alpha \in I$ ,  $A_\alpha \cap A_\beta \neq \emptyset$  אזי  $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$  קשיר.

**הוכחה:** אם  $\bigcup A_\alpha = U \cup V$  עבור  $U, V$  פתוחות וזרות, אזי  $A_\beta \subseteq U$  בלי הגבלת הכלליות (בטוח מוכל באחת מהן). כיוון שמתקיים  $A_\alpha \cap A_\beta \neq \emptyset$ , נובע כי  $A_\alpha \subseteq U$  לכל  $\alpha \in I$ , ומכאן כי  $V = \emptyset$ . ■

**טענה 2.11**  $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$  קשירים אם ורק אם  $\prod X_\alpha$  קשיר עם טופולוגיית המכפלה.

**הוכחה:** אם יש  $\beta$  כך שמתקיים  $X_\beta = U \cup V$  כאשר שתייהן פתוחות וזרות, אזי  $\prod X_\alpha = \pi_\beta^{-1}(U) \cup \pi_\beta^{-1}(V)$  המשך ההוכחה בשיעור הבא. ■