

טופולוגיה

© ארזים

16 בנובמבר 2016

הערה 0.1 אם $(X_1, \tau_1), (X_2, \tau_2)$ מרחבים טופולוגיים המושרים ממטריקות d_1, d_2 בהתאמה, אזי מרחב המכפלה $X_1 \times X_2$ (עם טופולוגיית המכפלה) גם מושרה ממטריקה. בדקו כי המטריקה

$$d((x, y), (w, z)) = \max(d_1(x, w), d_2(y, z))$$

משרה את טופולוגיית המכפלה.

תזכורת בהינתן X, Y מרחבים טופולוגיים, $f : X \rightarrow Y$ נקראת רציפה אם לכל U פתוחה בתוך Y , $f^{-1}(U)$ פתוחה בתוך X .

הגדרה 0.2 בהינתן מרחבים טופולוגיים X, Y , $f : X \rightarrow Y$ נקראת הומיאומורפיזם אם:

1. f חד-חד-ערכית ועל Y .

2. f רציפה.

3. f^{-1} רציפה.

כאשר קיימת f כזו נאמר כי X, Y הומיאומורפיים.

דוגמאות

1. המרחבים $\mathbb{R}, (-1, 1)$ הומיאומורפיים, על ידי ההעתקה

$$f(x) = \frac{x}{1-x^2}$$

כמו כן, לכל n מתקיים שהמרחב $\mathbb{R}^n$ הומיאומורפי למרחב $B_1(0)$.

2. הספירה במימד n , מסומנת $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ ומוגדרת

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1\}$$

בלי הקוטב הצפוני, הומיאומורפית למרחב $\mathbb{R}^2$: נגדיר

$$f : S^2 \setminus (0, 0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2$$

להיות ההטלה הסטריאוגרפית, כלומר $s \in S^2 \setminus (0, 0, 1)$ עוברת לנקודה במישור $\mathbb{R}^2$ שנחתכת עם הישר היחיד בין s לבין $(0, 0, 1)$. בדקו שזה הומיאומורפיזם.

3. נביט בהעתקה

$$g : [0, 1] \cup (2, 3] : [0, 2]$$

המוגדרת על ידי

$$g(x) = \begin{cases} x & x \in [0, 1] \\ x - 1 & 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

העתקה זו רציפה, וההופכית שלה היא

$$g^{-1}(y) = \begin{cases} y & y \in [0, 1] \\ y + 1 & 1 < y \leq 2 \end{cases}$$

שהיא כמובן לא רציפה.

1 הפרדה

יהי (x, τ) מרחב טופולוגי.

הגדרה 1.1 יהיו A, B קבוצות זרות. נאמר כי A, B ניתנות להפרדה אם קיימות קבוצות פתוחות U, V עבורן $U \cap V = \emptyset, A \subseteq U, B \subseteq V$.
זוג נקודות $x, y \in X$ ייקראו ניתנות להפרדה אם $\{x\}, \{y\}$ ניתנות להפרדה.
כמו כן, נקודה $x \in X$ וקבוצה $A \in X$ ייקראו ניתנות להפרדה אם $\{x\}, A$ ניתנות להפרדה.

1.1 אקסיומות ההפרדה

האקסיומות:

אקסיומת T_0 : לכל זוג נקודות שונות קיימת קבוצה פתוחה שמכילה אחת ולא את השנייה.

אקסיומת T_1 : לכל זוג נקודות שונות קיימת קבוצה פתוחה שמכילה את הנקודה הראשונה ולא את השנייה, וקיימת קבוצה פתוחה שמכילה את השנייה ולא את הראשונה.

אקסיומת T_2 (האוסדורף): כל זוג נקודות שונות ניתנות להפרדה.

אקסיומת T_3 : מתקיימת T_1 וכן תכונת הרגולריות: כל נקודה וכל קבוצה סגורה שלא מכילה אותה ניתנות להפרדה.

אקסיומת T_4 : מתקיימת T_1 וכן תכונת הנורמליות: כל שתי קבוצות סגורות זרות ניתנות להפרדה.

הגדרה 1.2 יהי (X, τ) מרחב טופולוגי. X ייקרא מרחב T_i אם האקסיומה T_i מתקיימת בו.

טענה 1.3 מרחב X הוא T_1 אם ורק אם כל נקודה $x \in X$ היא קבוצה סגורה.

הוכחה: נניח שכל נקודה היא קבוצה סגורה. יהיו $x, y \in X$. $\{x\}$ סגורה, ולכן $X \setminus \{x\}$ פתוחה ומכילה את y ולא את x . מאותו טיעון, $X \setminus \{y\}$ פתוחה ומכילה את x ולא את y . לכן X הוא T_1 .

כעת נניח כי X הוא T_1 . יהי $x \in X$. לכל $y \neq x$, לפי T_1 , יש U_y פתוחה כך שמתקיים $x \notin U_y$, $y \in U_y$, ולכן $X \setminus \{x\} = \bigcup_{y \neq x} U_y$ היא פתוחה. לכן $\{x\}$ סגורה. ■

הבחנה מתקיים $T_0 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_4$. נראה כעת כי אין אף גרירה בכיוון השני.

1. מרחב שאינו T_0 - כל מרחב טופולוגי טריוויאלי עם יותר משתי נקודות.
2. מרחב T_0 שאינו T_1 - $X = \{a, b\}$, עם הטופולוגיה $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}\}$. בבירור מתקיים, אבל $\{a\}$ אינה סגורה, ולכן X אינו T_1 .
3. מרחב T_1 שאינו T_2 - X קבוצה אינסופית כלשהי עם הטופולוגיה הקו־סופית: $\tau = \{\emptyset\} \cup \{U \subseteq X \mid |X \setminus U| < \infty\}$. T_1 בבירור מתקיים, כי אם $x \neq y$, אזי $X \setminus \{x\}$ מכיל את y ולא את x , $X \setminus \{y\}$ מכיל את x ולא את y . T_2 לא מתקיים, כי אם U, V פתוחות ושתייהן לא ריקות, אזי $U \cap V \neq \emptyset$.
4. מרחב T_2 שאינו T_3 - ניקח $X = \mathbb{R}$, ונגדיר את הטופולוגיה לפי הבסיס:

$$A = \{(a, b) \mid a < b\} \cup \left\{ (a, b) \setminus \left\{ \frac{1}{n} \mid 1 \leq n \in \mathbb{N} \right\} \mid a < b \right\}$$

זה אכן מרחב T_2 , כי זו טופולוגיה חזקה יותר מהטופולוגיה הסטנדרטית, אבל לא T_3 : הקבוצה $D = \left\{ \frac{1}{n} \mid 1 \leq n \in \mathbb{N} \right\}$ סגורה, כי

$$\mathbb{R} \setminus D = \bigcup_{a < b} (a, b) \setminus D$$

אבל D לא ניתנת להפרדה מהנקודה 0. נניח בשלילה שקיימות U, V פתוחות עבורן $0 \in U, D \subseteq V, U \cap V = \emptyset$. יש איבר בסיס שמכיל את 0 ומוכל בתוך U . כיוון שהוא זר לקבוצה D , הוא חייב להיות מן הצורה $(a_0, b_0) \setminus D$ עבור $a_0 < 0, b_0 > 0$. עבור m גדול מספיק, $0 \in (a_0, \frac{1}{m}) \setminus D$. כיוון שמתקיים $\frac{1}{2m} \in D$, בהכרח יש איבר בסיס מן הצורה $(c, d) \subseteq V$ שמתקיים $\frac{1}{2m} \in (c, d)$. בבירור הקבוצות $(a_0, \frac{1}{m}) \setminus D, (c, d)$ אינן זרות, בסתירה.

5. מרחב T_3 שאינו T_4 - נצטרך עוד כמה כלים כדי להציג את הדוגמה. נחזור אליה בהמשך.

טענה 1.4 מרחב טופולוגי (X, τ) הוא רגולרי אם ורק אם לכל $x \in X$ ולכל $U \subseteq X$ פתוחה עבורה $x \in U$, קיימת $V \subseteq X$ פתוחה כך שמתקיים $X \in V \subseteq \bar{V} \subseteq U$.

הוכחה: אם המרחב רגולרי, בהינתן $x \in X$ וקבוצה פתוחה $U \subseteq X$ עבורה $x \in U$, הקבוצה $X \setminus U$ סגורה, ולכן x ניתנת להפרדה ממנה - קיימות V, V' פתוחות כך שמתקיים $x \in V, V' \cap (X \setminus U) = \emptyset$, וכן $V \cap V' = \emptyset$. לכן $V \cap (X \setminus U) = \emptyset$, כלומר $V \subseteq U$, וכן $X \setminus V' \subseteq X \setminus U$ קבוצה סגורה שמכילה את V ומוכלת בתוך U , כלומר $V \subseteq X \setminus V' \subseteq U$, ולכן $x \in V \subseteq \bar{V} \subseteq U$ כנדרש.

■ אם ההנחה מתקיימת, ההוכחה דומה מאוד - נשאיר כתרגיל.

טענה 1.5 מרחב טופולוגי (X, τ) הוא רגולרי אם ורק אם לכל קבוצה סגורה A ולכל קבוצה פתוחה U עבורה $A \subseteq U$, קיימת קבוצה פתוחה V כך שמתקיים $A \subseteq V \subseteq \bar{V} \subseteq U$.

■ **הוכחה:** ההוכחה כאן דומה לקודמת, וגם נשארת כתרגיל.

טענה 1.6 מרחב טופולוגי (X, τ) הוא האוסדורף אם ורק אם הקבוצה $\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\} \subseteq X \times X$ היא סגורה בטופולוגיית המכפלה על $X \times X$.

■ **הוכחה:** נניח כי X האוסדורף, ונראה כי Δ^c פתוחה. תהי $(x, y) \in \Delta^c$, כלומר $x \neq y$, אזי מהאוסדורף קיימות קוצות פתוחות זרות U, V עבורן $x \in U, y \in V$. לכן $(x, y) \in U \times V$, ומאחר שמתקיים $U \cap V = \emptyset$, בהכרח $U \times V \cap \Delta = \emptyset$. לכן Δ^c אכן פתוחה. כעת נניח כי Δ סגורה, כלומר Δ^c פתוחה. אזי לכל $x \neq y$, כלומר $(x, y) \in \Delta^c$, קיים קיבר בסיס $U \times V$ עבורו $U \times V \subseteq \Delta^c$, ולכן $(x, y) \in U \times V$ פתוחות זרות, $x \in U, y \in V$. - כלומר X האוסדורף.

טענה 1.7 לכל $i \in \{1, 2, 3\}$, אם (X, τ) הוא מרחב טופולוגי T_i , אזי גם כל צמצום שלו T_i הוא.

■ **הוכחה:** נוכיח עבור T_3 , ההוכחות האחרות דומות. תהי $E \subseteq X$, ועליה טופולוגיה מושרית. תהי $x \in E$, אזי $\{x\}$ סגורה בתוך X , ולכן $X \setminus \{x\}$ פתוחה בתוך X , כלומר $E \setminus \{x\} = E \cap (X \setminus \{x\})$ פתוחה בתוך E , כלומר $\{x\}$ סגורה בתוך X ולמעשה הוכחנו כי T_1 נשמרת בצמצום. כעת יהיו $x \in E, A \subseteq E$ סגורה, כך שמתקיים $x \notin A$. מהגדרה, $A = E \cap C$, כאשר C סגורה בתוך X . לכן $x \notin C$, ולכן יש קבוצות U, V פתוחות בתוך X זרות כך שמתקיים $x \in U, C \subseteq V$, ולכן $x \in U \cap E, A \subseteq V \cap E$, שהן כמובן זרות ופתוחות בתוך E . לכן T_3 נשמרת תחת צמצום.

טענה 1.8 לכל $i \in \{1, 2, 3\}$, אם X, Y מרחבי T_i , אזי גם מרחב המכפלה $X \times Y$ עם טופולוגיית המכפלה הוא T_i .

■ **הוכחה:** נוכיח עבור T_3 , ההוכחות האחרות דומות. נוכיח שמתקיים התנאי השקול לרגולריות (שימור T_1 קל ויישאר כתרגיל). תהי $(x, y) \in X \times Y$, ותהי $U_1 \times U_2$ קבוצה פתוחה מהבסיס עבורה $(x, y) \in U_1 \times U_2$. אזי $x \in U_1, y \in U_2$, ומהנחת T_3 על U_1 ו- U_2 נקבל $V_1 \subseteq U_1, V_2 \subseteq U_2$ פתוחות עבורן מתקיים $\overline{V_1 \times V_2} \subseteq U_1 \times U_2$. לכן $\overline{V_1} \times \overline{V_2} \subseteq \overline{V_1 \times V_2} \subseteq U_1 \times U_2$, ולכן $x \in V_1, y \in V_2$, ולכן $(x, y) \in V_1 \times V_2 \subseteq U_1 \times U_2$. ■

דוגמא נציג דוגמא חשובה לשני דברים - מרחב שהוא T_3 ולא T_4 , וכן לשני מרחבי T_4 שמכפלתם אינה מרחב T_4 .

נגדיר את הישר העשיר $\mathbb{R}_l$ להיות המרחב הטופולוגי על $\mathbb{R}$ שנוצר על ידי $\{[a, b) \mid a < b\}$. נראה כי הוא T_4 , ולכן גם T_3 , ולכן $\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}_l$ גם הוא T_3 - אבל נראה שהוא לא T_4 . T_1 מתקיים על $\mathbb{R}_l$, כי הטופולוגיה שלו חזקה יותר מאשר הסטנדרטית. כעת, תהיינה A, B סגורות זרות בתוך $\mathbb{R}_l$. אזי לכל $a \in A \subseteq \mathbb{R} \setminus B$, כאשר נזכור כי $\mathbb{R} \setminus B$ פתוחה, יש $y_a \in \mathbb{R}$ כך שמתקיים $[a, y_a) \cap B = \emptyset$. באותו אופן, לכל $b \in B$ קיים $y_b \in \mathbb{R}$

עבורו $[b, y_b) \cap A = \emptyset$. נגדיר

$$U = \bigcup_{a \in A} [a, y_a)$$

$$V = \bigcup_{b \in B} [b, y_b)$$

ברור כי U, V פתוחות. כמו כן, הן זרות, כי אחרת היו $a \in A, b \in B$ כך שמתקיים $[a, y_a) \cap [b, y_b) \neq \emptyset$. אם $a > b$, נובע $[b, y_b) \cap A \neq \emptyset$, בסתירה, ובדומה אם $a < b$.
 לכן הוכחנו כי $\mathbb{R}_I$ אכן T_3 .
 כעת נראה כי $\mathbb{R}_I \times \mathbb{R}_I$ אינו T_4 . נביט בקבוצה

$$L = \{(x, -x) \mid x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}_I \times \mathbb{R}_I$$

L סגורה, שכן הטופולוגיה של $\mathbb{R}_I^2$ חזקה יותר מאשר $\mathbb{R}^2$. נניח בשלילה כי $\mathbb{R}_I^2$ הוא T_4 .
 הטופולוגיה המושרית על L היא דיסקרטית. לכן כל תת קבוצה $A \subseteq L$ סגורה בתוך L , ולכן סגורה גם בתוך $\mathbb{R}_I^2$. מהנחת השלילה, לכל $A \subseteq L$, ניתן להפריד בין $A, L \setminus A$ כלומר קיימות U_A, V_A פתוחות בתוך $\mathbb{R}_I^2$ זרות, עבורן $A \subseteq U_A, L \setminus A \subseteq V_A$. תהי $D = \mathbb{Q}^2 \subseteq \mathbb{R}_I^2$ ונגדיר העתקה

$$\varphi : 2^L \rightarrow 2^D$$

$$\varphi(A) = \begin{cases} D \cap U_A & A \neq \emptyset, L \\ \emptyset & A = \emptyset \\ L & A = D \end{cases}$$

נוכיח כי φ חד-חד-ערכית, ונקבל סתירה משיקולי עוצמות. נשים לב שאם $A \neq \emptyset, L$, אזי $D \cap U_A$ אינה ריקה, כי U_A מכילה איבר בסיס, שחייב להכיל נקודה רציונאלית. בנוסף, $D \cap U_A \neq D$, כי $D \cap V_A \neq \emptyset$.
 נרצה להראות כי לכל $A, B \subseteq L$ עם $A \neq B$ מתקיים $\varphi(A) \neq \varphi(B)$. נניח בלי הגבלת הכלליות כי קיים $x \in A \setminus B$. אזי $x \in L \setminus B$, כלומר $x \in U_A \cap V_B$. לכן $U_A \cap V_B$ קבוצה פתוחה לא ריקה, ולכן קיים $y \in D \cap U_A \cap V_B$, ולכן $D \cap U_A \neq D \cap U_B$.
 הגענו לסתירה, שכן $|2^L| > |2^D|$, שכן $|L| > |D|$.

טענה 1.9 כל מרחב מטרי הוא T_4 .

הוכחה: קל לבדוק כי T_1 מתקיים - בדקו.
 יהיו A, B סגורות וזרות במרחב המטרי (X, d) . נגדיר עבור $x \in X, E \subseteq X$ את המרחק

$$d(x, E) = \inf_{e \in E} d(x, e)$$

נשים לב כי לכל $x \in A$, $d(x, B) > 0$, כי אחרת $\bar{B} = B$. לכל $a \in A, b \in B$ נסמן

$$\begin{aligned} r_{a,B} &= d(a, B) \\ r_{b,A} &= d(b, A) \end{aligned}$$

מתקיים כמובן

$$\begin{aligned} A &\subseteq U = \bigcup_{a \in A} B_{\frac{r_{a,B}}{2}}(a) \\ B &\subseteq V = \bigcup_{b \in B} B_{\frac{r_{b,A}}{2}}(b) \end{aligned}$$

ואז U, V פתוחות וזרות, ומקיימות את הנדרש. ■

1.2 הלמה של אוריסון

משפט 1.10 (הלמה של אוריסון) יהי X מרחב טופולוגי T_4 , ויהיו $C, D \subseteq X$ קבוצות סגורות, זרות ולא ריקות. אזי יש פונקציה $f: X \rightarrow [0, 1]$ רציפה כך שמתקיים $f|_C = 0, f|_D = 1$.

הוכחה: נזכר בתנאי השקול שראינו עבור T_4 - לכל A סגורה שמוכלת בתוך U פתוחה קיימת V פתוחה כך שמתקיים $A \subseteq V \subseteq \bar{V} \subseteq U$. נגדיר אינדוקטיבית סדרה אינסופית של קבוצות פתוחות וסגורות: C, D סגורות. נתחיל עם $C_0 = C$, והיות והקבוצה $X \setminus D$ פתוחה ומכילה את C , ניקח $V_1 = X \setminus D$, ואז $C_0 \subseteq V_1$. מנורמליות, קיימת קבוצה סגורה $C_{\frac{1}{2}}$ ופתוחה $V_{\frac{1}{2}}$ כך שמתקיים $C_0 \subseteq V_{\frac{1}{2}} \subseteq C_{\frac{1}{2}} \subseteq V_1$. (נורמליות) $\bar{V}_{\frac{1}{2}} = C_{\frac{1}{2}}$. מנורמליות, יש $V_{\frac{3}{4}}, C_{\frac{3}{4}}, V_{\frac{1}{4}}, C_{\frac{1}{4}}$ פתוחות וסגורות לפי הסימונים C סגורות, V פתוחות) כך שמתקיים

$$C_0 \subseteq V_{\frac{1}{4}} \subseteq C_{\frac{1}{4}} \subseteq V_{\frac{1}{2}} \subseteq C_{\frac{1}{2}} \subseteq V_{\frac{3}{4}} \subseteq C_{\frac{3}{4}} \subseteq V_1$$

אינדוקטיבית, לכל k יש $\{C_{\frac{i}{2^k}}\}_{i=0}^{2^k-1}, \{V_{\frac{i}{2^k}}\}_{i=1}^{2^k}$ כאשר כל C סגורה, כל V פתוחה, ומתקיים

$$C_0 \subseteq V_{\frac{1}{2^k}} \subseteq C_{\frac{1}{2^k}} \subseteq V_{\frac{2}{2^k}} \subseteq C_{\frac{2}{2^k}} \subseteq \dots \subseteq V_{\frac{2^k-1}{2^k}} \subseteq C_{\frac{2^k-1}{2^k}} \subseteq V_1$$

כעת, נגדיר

$$\begin{aligned} f: X &\rightarrow [0, 1] \\ f(x) &= \begin{cases} \inf \{t \mid x \in V_t\} & \exists t. x \in V_t \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned}$$

לכל $x \in D$ מתקיים $x \notin V_1$, ולכן $x \notin V_t$ לכל t , כלומר $f(x) = 0$.
לכל $x \in C$ מתקיים $x \in C \subseteq V_{\frac{1}{2^k}}$, ולכן לכל k , מתקיים $f(x) \leq \frac{1}{2^k}$, כלומר $f(x) = 0$.

נוכיח רציפות. ניקח תת בסיס של $[0, 1]$:

$$\{(a, 1] \mid a \in [0, 1)\} \cup \{[0, b) \mid b \in (0, 1]\}$$

נוכיח שתמונות הפוכות של איברי הן פתוחות, ונסיים. אם $x \in f^{-1}([0, b))$ כלומר $0 \leq f(x) < b$, אזי קיים $t < b$ עבורו $x \in V_t$. נרצה להראות כי

$$f^{-1}([0, b)) = \bigcup_{t < b} V_t$$

הראינו כבר הכלה בכיוון $\subseteq$. מצד שני, אם $x \in \bigcup_{t < b} V_t$, אז קיים $t_0 < b$ כך שמתקיים $x \in V_{t_0}$ ולכן $f(x) \leq t_0 < b$. כלומר $x \in f^{-1}([0, b))$. לכן הראינו כי התמונה ההפוכה של $[0, b)$ אכן פתוחה.

כעת נראה כי $f^{-1}((b, 1])$ פתוחה על ידי כך שנראה שהמשלים שלה קבוצה סגורה על ידי

$$f^{-1}([0, b]) = \bigcap_{t > b} C_t$$

אם $x \in f^{-1}([0, b])$, אזי $f(x) \leq b$. כלומר $x \in V_t \subseteq C_t$ לכל $t > b$. כלומר $x \in \bigcap_{t > b} C_t$.
אם $x \notin f^{-1}([0, b])$, אזי $f(x) > b$. כלומר יש $t_2 > t_1 > b$ כך שמתקיים $x \notin V_{t_2}$.
ולכן $x \notin C_{t_1}$ שכן $C_{t_1} \subseteq V_{t_2}$. כלומר $x \notin \bigcap_{t > b} C_t$.
בסך הכל, סיימנו. ■