

טופולוגיה

© ארזים

9 בנובמבר 2016

בשיעור שעבר ראינו את ההגדרות של טופולוגיות ושל בסיסים ניתן הגדרה נוספת:

הגדרה 0.1 $\mathcal{B} \subseteq P(X)$ נקראת תת-בסיס אם לכל $x \in X$ קיים $B \in \mathcal{B}$ עבורו $x \in B$.

ראינו כבר כי קבוצת כל האיחודים של קבוצות מתוך בסיס מסויים היא טופולוגיה. לעומת זאת, קבוצת כל החיתוכים הסופיים של קבוצות מתוך תת-בסיס היא בסיס, ולכן קבוצת כל האיחודים של חיתוכים סופיים של קבוצות מתוך תת-בסיס היא טופולוגיה.

1 פעולות על מרחבים טופולוגיים

1.1 צמצום

הגדרה 1.1 יהי (X, τ_X) מרחב טופולוגיה ויהי $Y \subseteq X$. הטופולוגיה המושרית על Y היא

$$\tau_Y = \{U \cap Y \mid U \in \tau_X\}$$

תרגיל בדקו שזו אכן טופולוגיה.

הערה 1.2 לא יכול להיות שמתקיים $\tau_Y \not\subseteq \tau_X$, כלומר הפתיחות לאו דווקא נשמרת.

דוגמא $X = \mathbb{R}$ עם הטופולוגיה הסטנדרטית, $Y = [0, 1]$. הקבוצה $[0, \frac{1}{2})$ אינה פתוחה בתוך X אבל כן בתוך Y , כי $[0, \frac{1}{2}) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \cap [0, 1]$.

1.2 מכפלה

1.2.1 מכפלת שני מרחבים

הגדרה 1.3 יהיו $(X, \tau_X), (Y, \tau_Y)$ מרחבים טופולוגיים. נגדיר את הבסיס למרחב $X \times Y$ להיות $\mathcal{B} = \{U \times V \mid U \in \tau_X, V \in \tau_Y\}$, ונגדיר את טופולוגיית המכפלה הזו להיות הטופולוגיה שנוצרת על ידי הבסיס הזה.

הערה 1.4 מדוע $\mathcal{B}$ אכן בסיס? לכל $(x, y) \in X \times Y$ מתקיים בבירור $(x, y) \in X \times Y \in \mathcal{B}$. כעת, אם $(x, y) \in (U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2)$ אזי יש שייכות בכל קואורדינטה, ולכן

$$(x, y) \in (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2) \subseteq (U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2)$$

טענה 1.5 אם $\mathcal{B}_X, \mathcal{B}_Y$ הם בסיסים של τ_X, τ_Y אז הקבוצה $\{B_1 \times B_2 \mid B_1 \in \mathcal{B}_X, B_2 \in \mathcal{B}_Y\}$ היא בסיס לטופולוגיית המכפלה.

ההוכחה לא מסובכת, ופרטיה נשארים כתרגיל.

הגדרה 1.6 יהיו $(X_1, \tau_1), (X_2, \tau_2)$ מרחבים מטריים. נגדיר

$$\begin{aligned}\pi_1 : X_1 \times X_2 &\rightarrow X_1 \\ (x_1, x_2) &\mapsto x_2 \\ \pi_2 : X_1 \times X_2 &\rightarrow X_2 \\ (x_1, x_2) &\mapsto x_1\end{aligned}$$

אלו נקראות ההטלות של $X_1 \times X_2$ על X_1 ועל X_2 , בהתאמה.

הערה 1.7 נשים לב כי

$$\begin{aligned}\pi_1^{-1}(U) &= U \times X_2 \\ \pi_2^{-1}(V) &= X_1 \times V\end{aligned}$$

טענה 1.8 הקבוצה $\{\pi_1^{-1}(U) \mid U \in \tau_1\} \cup \{\pi_2^{-1}(V) \mid V \in \tau_2\}$ היא תת בסיס של $X_1 \times X_2$, והיא יוצרת את טופולוגיית המכפלה.

הוכחה: העובדה שזה תת בסיס קלה, שכן זה מכיל את הקבוצה $X \times Y$. כמו כן, כל קבוצה מהסוג $U \times V$, כאשר $U \in \tau_1, V \in \tau_2$, ניתן לכתוב בתור $\pi_1^{-1}(U) \cap \pi_2^{-1}(V)$. ■

1.2.2 מכפלת כמות סופית של מרחבים

הגדרה 1.9 אם (X_i, τ_i) מרחבים טופולוגיים לכל $1 \leq i \leq n$, הבסיס

$$\mathcal{B} = \{U_1 \times \dots \times U_n \mid \forall 1 \leq i \leq n \ U_i \in \tau_i\}$$

יוצר את טופולוגיית המכפלה, וכמו כן

$$\mathcal{B}' = \bigcup_{i=1}^n \{\pi_i^{-1}(U) \mid U \in \tau_i\}$$

תת בסיס של אותה טופולוגיה.

1.2.3 מכפלה כלשהי של מרחבים

הגדרה 1.10 יהיו (X_α, τ_α) מרחבים טופולוגיים לכל $\alpha \in I$ כאשר I קבוצת אינדקסים כלשהי. נגדיר שתי טופולוגיות על $\prod_\alpha X_\alpha$:

1. טופולוגיית המכפלה - נסמנה τ_{prod} . זו הטופולוגיה שנוצרת מהתת בסיס

$$\bigcup_{\alpha \in I} \{\pi_\alpha^{-1}(U) \mid U \in \tau_\alpha\}$$

2. טופולוגיית הקופסא - נסמנה τ_{box} . זו הטופולוגיה שנוצרת מהבסיס

$$\left\{ \prod_{\alpha \in I} U_\alpha \mid \forall \alpha \in I \ U_\alpha \in \tau_\alpha \right\}$$

הערה 1.11 נשים לב שטופולוגיית המכפלה נוצרת על ידי כל המכפלות

$$\prod_{\alpha \in I} U_\alpha$$

שבהן רק מספר סופי של U_α אינן X_α , ולכן τ_{box} חזקה יותר מאשר τ_{prod} .

דוגמא תהי I קבוצה אינסופית כלשהי, ויהי $X = \prod_I \mathbb{R}$. נביט בקבוצה $(-1, 1)^I = \prod_I (-1, 1)$. ברור שמתקיים $U \in \tau_{\text{box}}$, אבל גם $U \notin \tau_{\text{prod}}$.

2 סגירות במרחב טופולוגי

הגדרה 2.1 בהינתן (X, τ) מרחב טופולוגי, קבוצה $C \subseteq X$ נקראת סגורה אם $X \setminus C \in \tau$.

הערה 2.2 $X, \emptyset$ הן סגורות.

הערה 2.3 קבוצת הקבוצות הסגורות סגורה לחיתוכים כלשהם, ולאיחודים סופיים.

דוגמאות

1. בטופולוגיה הדיסקרטית, כל הקבוצות הן סגורות.
2. במרחב המטרי, הקבוצה $\{y \mid d(x, y) \leq r\}$ עבור $x \in X$ ועבור $r \geq 0$ היא סגורה, כל לכל z במשלים קיים $\varepsilon > 0$ עבורו

$$z \in B(z, \varepsilon) \subseteq \{y \mid d(x, y) > r\}$$

2.1 סגור, פנים ושפה

הגדרה 2.4 יהי (X, τ) מרחב טופולוגי, ותהי $A \subseteq X$ קבוצה כלשהי. הסגור של A , שמסומן $\overline{A}$, הוא חיתוך כל הקבוצות הסגורות המכילות את A , כלומר הקבוצה הסגורה המינימלית המכילה את A .

דוגמא ניקח $X = \{a, b\}$, עם $\tau = \{\emptyset, \{a\}, X\}$. כעת $\overline{\{a\}} = X$, $\overline{\{b\}} = \{b\}$.

הגדרה 2.5 בהינתן מרחב טופולוגי (X, τ) , ויהי $x \in X$. סביבה של x היא קבוצה $E \subseteq X$ כך שקיימת קבוצה פתוחה U המקיימת $x \in U \subseteq E$.

דוגמא הקטע $[0, 1]$ הוא סביב של $\frac{1}{2}$.

טענה 2.6 בהינתן $A \subseteq X$, אם $x \in \overline{A}$ אם ורק אם לכל סביבה E של x מתקיים $E \cap A \neq \emptyset$.

הוכחה: נוכיח שקילות בין השלילות.

נניח כי $x \notin \overline{A}$, ואז $x \in X \setminus \overline{A}$, וזו קבוצה פתוחה שלא נחתכת עם A .

כעת נניח כי קיימת סביבה E של x שלא נחתכת עם A . נובע כי יש קבוצה פתוחה U כך שמתקיים $x \in U$ וכן $U \cap A = \emptyset$. לכן $X \setminus U$ סגורה ומכילה את A , כלומר $\overline{A} \subseteq X \setminus U$, ולכן $x \notin \overline{A}$. ■

2.7 טענה 1.

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

2.

$$\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$$

הוכחה: לגבי הסעיף הראשון: יהי $x \in \overline{A \cup B}$. נניח כי $x \notin \overline{A}$, אזי מהטענה הקודמת כל סביבה של x נחתכת עם A , ולכן גם עם האיחוד, כלומר $x \in \overline{A \cup B}$. כמו כן, $A \subseteq \overline{A}$, $B \subseteq \overline{B}$, ולכן $A \cup B \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$, אבל $\overline{A \cup B}$ סגורה, ולכן מההגדרה $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$. בסך הכל קיבלנו שוויון. הוכחת הסעיף השני זהה להוכחת החלק השני של הסעיף הראשון. ■

דוגמא נדגים מדוע יש רק הכלה בסעיף השני. למשל עבור $A = (0, 1)$, $B = (1, 2)$, מתקיים $A \cap B = \emptyset$, ולכן $\overline{A \cap B} = \emptyset$, אבל $\overline{A} = [0, 1]$, $\overline{B} = [1, 2]$, ולכן $\overline{A} \cap \overline{B} = \{1\}$. דוגמא אחרת היא לקחת $A = \mathbb{Q}$, $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. כאן החיתוך ריק, אבל הסגור של כל קבוצה הוא כל $\mathbb{R}$.

הגדרה 2.8 $A \subseteq X$ תקרא צפופה אם $\overline{A} = X$.

הגדרה 2.9 בהינתן קבוצה $A \subseteq X$, נגדיר את הפנים של A , שנסמנו A^0 , להיות איחוד כל הקבוצות הפתוחות המוכלות בתוך A . באופן שקול, זו הקבוצה הפתוחה המקסימלית אותה A מכילה.

הגדרה 2.10 השפה של קבוצה $A \subseteq X$ היא $\partial A = \overline{A} \setminus A^0$.

הגדרה 2.11 $x \in X$ היא נקודת הצטברות של A אם כל סביבה של x מכילה נקודה מתוך A שאינה x .

טענה 2.12 יהי (X, τ) מרחב טופולוגי, ותהי $A \subseteq X$ קבוצה. נסמן בתור A' את קבוצת נקודות ההצטברות של A . אזי

$$\overline{A} = A \cup A'$$

הוכחה: יהי $x \in A \cup A'$. אם $x \in A$, ברור שגם $x \in \overline{A}$. אם $x \in A'$, אז כל סביבה של x נחתכת עם A , ומהטענה, $x \in \overline{A}$.
יהי $x \in \overline{A}$. אם $x \in A$, אז וודאי $x \in A \cup A'$. אם $x \in \overline{A} \setminus A$, אזי כל סביבה של x נחתכת עם A בנקודה שאינה x - שכן $x \notin A$. לכן $x \in A'$. ■

תזכורת $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ היא רציפה אם

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

אם $(X, d_x), (Y, d_y)$ מרחבים מטריים, $f : X \rightarrow Y$ רציפה אם

$$\forall x \in X, \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad d_x(x, x') < \delta \Rightarrow d_y(f(x), f(x')) < \varepsilon$$

הגדרה 2.13 אם $(X, \tau_x), (Y, \tau_y)$ מרחבים טופולוגיים, $f : X \rightarrow Y$ נקראת רציפה אם

$$\forall U \in \tau_y \quad f^{-1}(U) \in \tau_x$$

טענה 2.14 עבור מרחבים מטריים והטופולוגיה המושרית בהם, ההגדרות שקולות.

הוכחה: נניח כי ההגדרה במרחבים טופולוגיים מתקיימת. יהי $x \in X, \varepsilon > 0$, ניקח $U = B_\varepsilon(f(x))$. לפי ההנחה, $f^{-1}(U)$ פתוחה, וכן $x \in f^{-1}(U)$ כלומר קיים $\delta > 0$ עבורו $B_\delta(x) \subseteq U$, וזה בדיוק מה שרצינו להראות.
כעת נניח כי ההגדרה במרחבים מטריים מתקיימת. תהי $U \subseteq Y$ פתוחה. יהי $x \in f^{-1}(U)$. לכן $f(x) \in U$, ולכן קיים $\varepsilon > 0$ עבורו $B_\varepsilon(f(x)) \subseteq U$. לפי ההנחה, קיים $\delta > 0$ עבורו $B_\delta(x) \subseteq f^{-1}(U)$, כלומר $f(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x)) \subseteq U$. ולכן $f^{-1}(U)$ אכן פתוחה. ■

טענה 2.15 יהיו X, Y מרחבים טופולוגיים, ותהי $f : X \rightarrow Y$. התנאים הבאים שקולים.

1. f רציפה.

2. לכל קבוצה סגורה $C \subseteq Y$ הקבוצה $f^{-1}(C) \subseteq X$ סגורה.

3. אם $\mathcal{B}$ בסיס או תת בסיס לטופולוגיה של Y , אזי לכל $B \in \mathcal{B}$ מתקיים $f^{-1}(B) \in \tau_x$.

4. לכל $x \in X$ ולכל סביבה W של $f(x)$ מתקיים שהקבוצה $f^{-1}(W)$ היא סביבה של x .

5. לכל $A \subseteq X$ מתקיים $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

הוכחה: $2 \Rightarrow 1$: $f^{-1}(Y \setminus C)$ פתוחה, ולכן $X \setminus f^{-1}(C)$ היא סגורה, וזו בדיוק $f^{-1}(C)$.

$2 \Rightarrow 1$: בדיוק באותה דרך.

$$f^{-1}(U) = f^{-1}\left(\bigcup B_\alpha\right) = \bigcup f^{-1}(B_\alpha)$$

לכן $f^{-1}(U)$.

$1 \Rightarrow 3$: טריוויאלי.

$4 \Rightarrow 1$: יהי $x \in X$, ותהי W סביבה של $f(x)$. קיימת U פתוחה עבורה $f(x) \in U \subseteq W$, ואז $f^{-1}(U)$ פתוחה ומקיימת $f^{-1}(U) \subseteq f^{-1}(W)$, ולכן $f^{-1}(W)$ סביבה של x .

$4 \Rightarrow 1$: תהי $U \subseteq Y$ פתוחה. יהי $x \in f^{-1}(U)$, כלומר $f(x) \in U$. סביבה של $f(x)$, ולכן $f^{-1}(U)$ סביבה של x . לכן יש קבוצה פתוחה $U_x \subseteq f^{-1}(U)$ כלומר $x \in U_x \subseteq f^{-1}(U)$.

$$f^{-1}(U) = \bigcup_{x \in f^{-1}(U)} U_x$$

ולכן $f^{-1}(U)$ פתוחה.

$5 \Rightarrow 1$: יהי $x \in \overline{A}$. נרצה להראות כי $f(x) \in \overline{f(A)}$. כלומר, יש להראות שכל סביבה של $f(x)$ חותכת את $f(A)$. תהי E סביבה של $f(x)$, אזי יש קבוצה פתוחה $U \subseteq E$ כזו ש- $f(x) \in U$. נקבל כי $f^{-1}(U)$ פתוחה, וכן $x \in f^{-1}(U)$. לכן $f^{-1}(U)$ סביבה של x , ולכן נחתכת עם A . מכאן U נחתכת עם $f(A)$, כלומר E נחתכת עם $f(A)$ - ולכן $f(x) \in \overline{f(A)}$.

$5 \Rightarrow 2$: תהי $C \subseteq Y$ קבוצה סגורה. מההנחה מתקיים

$$f\left(\overline{f^{-1}(C)}\right) \subseteq \overline{f(f^{-1}(C))} \subseteq \overline{C} = C$$

לכן מתקיים $\overline{f^{-1}(C)} \subseteq f^{-1}(C)$. ההכלה ההפוכה תמיד מתקיימת, ולכן $f^{-1}(C) = \overline{f^{-1}(C)}$. כלומר C סגורה. ■

הערה 2.16 הפונקציה הקבועה תמיד רציפה, כי $f^{-1}(U) \in \{\emptyset, X\}$ לכל U .

הערה 2.17 אם X, Y, Z מרחבים טופולוגיים וכן $g: Y \rightarrow Z$, $f: X \rightarrow Y$ רציפות, אזי $g \circ f: X \rightarrow Z$ רציפה.

תרגיל עבור $f, g \in X \rightarrow \mathbb{R}$ בדקו כי $f \pm g, fg, \frac{f}{g}$ (כאשר $g \neq 0$ תמיד) רציפות גם כן.

הערה 2.18 נניח כי $\{X_\alpha\}$ מרחבים טופולוגיים, וכי $X = \prod X_\alpha$ מרחב המכפלה, אזי לכל α , ההטלה $\pi_\alpha : X \rightarrow X_\alpha$ רציפה ביחס לטופולוגיית המכפלה, ולכן גם ביחס לטופולוגיית הקופסה.

הערה 2.19 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ המוגדרת על ידי $f(t) = (t, t, \dots, t)$ היא רציפה ביחס לטופולוגיית המכפלה, אבל לא ביחס לטופולוגיית הקופסה. זאת משום שהקבוצה $\prod (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ היא קבוצה פתוחה בתוך $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, אבל תמונתה ההפוכה היא $\{0\}$ - שאינה פתוחה.