$f_{n,k}(x)=0<1 \Rightarrow x\in V_{(n,k)}$

$f_{n,k}(X\setminus U_k)=1 \Leftarrow x\notin U_k \Rightarrow x\notin V_{n,k} \Rightarrow V_{n,k}\subset U_k\subset U$

הרצאה מס' 13 — 26/11/18

משפט של אוריסון - יהי (X,Ω) מרחב האוסדורף רגולרי C_2 אז X מטריזבילי

הוכחה - $U_1,U_2,\ldots$ בסיס בן מניה של הטופולוגיה. נגדיר סדרת קבוצות מספרים
$M=\{(n,m)\mid U_n\subset\overline{U_n}\subset U_m\}$ (יכולה בעקרון להיות ריקה, בפועל שלא). תנאי של רגולריות של מרחב נותן
שכל נקודה אפשר להפריד מקבוצה סגורה, אבל זה ניתן לנסח בדרך אחרת, תהי קבוצה פתוחה
$x\in U$ אז קיימת סביבה V $x\in V\subset\overline{V}\subset U$ (תנאי שקול לרגולריות)
לכל $(n,m)\in M$ לפי תנאי $\phi=\underbrace{\overline{U_n}}_{\text{סגורה}}\cap \underbrace{X\setminus U_m}_{\text{סגורה}}$ ולכן מהלמה של אוריסון קיימת פונקציה $f_{n,m}\in C(X,[0,1])$
$f_{n,m}|_{X\setminus U_m}=1$ ו- $f_{n,m}|_{\overline{U_n}}=0$.
קיבלנו סדרה של פונקציות, נראה שזו סדרה מאוד עשירה של פונקציות.
לכל $x\in X$ ולכל $x\in U\in\Omega$ כיוון ש $U_1,U_2,\ldots$ בסיס אז קיים מס' $m\in\mathbb{N}$ כך ש $x\in U_m\subset U$
ומתנאי של רגולריות קיימת V פתוחה כך ש- $x\in V\subset\overline{V}\subset U_m$ ושוב מכיוון ש $U_1,U_2,\ldots$ בסיס אז קיים
n כך ש $x\in U_n\subset V$ ואז מתקיים $x\in U_n\subset\overline{U_n}\subset U_m$ במקרה זה $f_{n,m}(x)=0$ והקבוצה
$\{y\mid f_{n,m}(y)<1\}\subset U$. כעת יש סדרה בת מניה של פונקציות לכן ניתן "לסדר" אותה.
קיבלנו - $k\in\mathbb{N}$, f_k עם תכונה הבאה - לכל $x\in X$ כך שלכל $U\in\Omega$, $x\in U$ קיים k כך ש $f_k(x)=0$ (#)
$V_k=\{y\mid f_k(y)<1\}\subset U$ (סימנו (n,m) ב- k)
כעת, נזכר שבתחילת הקורס הגדרנו $\ell_1\ni(a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots)$ כך ש $a_n\in\mathbb{R}$ $\sum_{k=1}^{\infty}|a_n|<\infty$ והגדרנו
מטריקה עבור $a,b\in\ell_1$ $d(a,b)=\sum_{k=1}^{\infty}|a_k-b_k|$ ו ℓ_1 מרחב מטרי.
נבנה העתקה ממרחב X למרחב ℓ_1 ונבדוק שהיא הומיאומורפיזם ומכאן נקבל את הדרוש.
נגדיר לכל $x\in X$ $F(x)=\left(f_1(x),\frac{f_2(x)}{2},\ldots,\frac{f_n(x)}{2^n}\right)$ ומתקיים $f_n(x)\in[0,1]$ $\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{f_k(x)}{2^k}\right|<\infty$ לכן התמונה
ב ℓ_1, נבדוק רציפות.
1. F רציפה מ- X ל- ℓ_1. צריך לבדוק עבור $\varepsilon>0$ כלשהו (נבדוק רציפות בנק' ספציפית)
תהי $x\in X$ קיימת סביבה $x\in U$ כך שלכל $y\in U$ $d(F(x),F(y))<\varepsilon$
נבחר n כך ש $\frac{1}{2^n}<\frac{\varepsilon}{4}$. כעת לכל $y\in X$ מתקיים-

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{f_k(x)}{2^k}-\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{f_k(y)}{2^k}\right|<\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n}<\frac{\varepsilon}{2}$$

לכל $k\le n$ נגדיר W_k, כיוון ש f_k רציפה אזי
$f_k\in C(X,[0,1])$ קיימת סביבה $W_k\in\Omega$ כך שלכל $y\in W_k$ $|f_k(x)-f_k(y)|<\frac{\varepsilon}{4n}$ ונגדיר $U=\bigcap_{k=1}^{n}W_k$

לבחירת $y \in U$ שבחרנו נקבל

$$d(F(x),F(y)) = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{f_k(x)}{2^k} - \frac{f_k(y)}{2^k} \right| <$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{4n \cdot 2^k} + \underbrace{\sum \frac{\varepsilon}{2}}_{\text{זנב}} < \varepsilon$$

2. נבדוק ש F חח"ע. יהיו $x \neq y$, מרחב X האוסדורף לכן קיימת סביבה $x \in U \in \Omega$ כך ש $y \notin U$

(#) $\Leftarrow$ קיים k כך ש $f_k(x)=0$ ו $f_k(y)=1$ לפי הלמה הקודמת – k ויש הבדל בקואורדינטה ולכן $F(x)=F(y)$

3. נסמן $A=\mathrm{Im}F$ ונבדוק $F^{-1} \in C(A,X)$, כלומר לכל $a \in A$ ולכל סביבה U של $F^{-1}(a) \in U$ קיים $\delta>0$

כך שלכל $b \in A$ $d(a,b)<\delta$ מתקיים $F^{-1}(b) \in U$.

כיוון ש $a \in A$ קיים $x \in X$ כך ש $F(x)=a$, תהי $x \in U$ סביבה של X, קבוצה פתוחה לכן מ(#)

קיים n כך ש $f_n(x)=0$ ו $\{y \mid f_n(y)<1\} = V_n \subset U$. כעת צריך לבחור δ, נבחר $\delta=\frac{1}{2^n}$

נניח כי $b \in A$ כלומר קיים $y \in X$ כך ש $F(y)=b$ ונניח $d(a,b)<\frac{1}{2^n}$ אז

$$\frac{f_n(y)}{2^n} = \frac{f_n(x)-f_n(y)}{2^n} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{f_k(x)-f_k(y)}{2^k} \right| < \frac{1}{2^n}$$ ולכן $f_n(y)<1$ כלומר $y \in U$.

קומפקטיות

הגדרה- מרחב (X,Ω) נקרא קומפקטי אם לכל כיסוי פתוח של X קיים תת כיסוי סופי.

דוגמאות- (1) $|X|<\infty$ אז X קומפקטי

(2) $A=\{0,1,\frac{1}{2},\dots,\frac{1}{n}\} \subset \mathbb{R}$ היא קבוצה קומפקטית, עם טופולוגיה מושרה מ $\mathbb{R}$. אם יש כיסוי של A

בעזרת קבוצות פתוחות $A \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ אז קיימת α_0: $0 \in U_{\alpha_0}$ בסיס של טופולוגיה של $\mathbb{R}$

קטעים פתוחים לכן קיים ε כך ש $(-\varepsilon,\varepsilon) \subset U_{\alpha_0}$ $|A \setminus U_{\alpha_0}| < \varepsilon$ ולכן

מסוף I מקבלים קומפקטיות