

תרגול 8

17 במאי 2017

הגדרה 0.1 נוסחאות הן שקולות ($A \equiv B$) אם בכל מבנה M ובכל השמה ρ ערכן זהה

$$[[A]]_{\rho}^M = [[B]]_{\rho}^M$$

תרגיל: הראו כי

$$\forall x \varphi \{x/z\} \equiv \forall y \varphi \{y/z\}$$

כאשר x, y אינם חופשיים ב φ

פתרון: יהיו מבנה M וסביבה ρ במבנה.

ממשפט הקשר בין הצבות לעדכוני סביבות וממשפט באי תלות במשתנים שאינם חופשיים, לכל w שאינו חופשי ב φ ולכל $A \in D^M$

$$[[\varphi \{w/z\}]]_{\rho\{a/w\}} = [[\varphi]]_{\rho\{a/w\}\{[w]_{\rho\{a/w\}}/z\}} = [[\varphi]]_{\rho\{a/w\}\{a/z\}}$$

$$= [[\varphi]]_{\rho\{a/z\}}$$

ובפרט

$$[[\varphi \{x/z\}]]_{\rho\{a/x\}} = [[\varphi \{y/z\}]]_{\rho\{a/y\}}$$

לכל $a \in D^M$

$$[[\forall x \varphi \{x/z\}]]_{\rho} = \begin{cases} t & [[\varphi \{x/z\}]]_{\rho\{a/x\}} = t \\ f & \text{else} \end{cases} = \begin{cases} t & [[\varphi \{y/z\}]]_{\rho\{a/y\}} = t \\ f & \text{else} \end{cases} = [[\forall y \varphi \{y/z\}]]_{\rho}$$

הגדרה 0.2 תהיינה קבוצת נוסחאות (תורה) T ונוסחה A

• נאמר כי $T \models_v A$ אם בכל מבנה שבו T נכונה גם A נכונה.

• נאמר $T \models_t A$ אם בכל מבנה לכל סביבה המספקת את T , ρ מספקת גם את A

הערה 0.3 אם השגנו $T \not\models_v A$ אז יש מבנה M בו T נכונה אך A לא, כלומר יש סביבה שלא מספקת את A .

סביבה זו מספקת את T ולכן $T \models_t A$, מכאן שמתקיים $\models_t \subseteq \models_v$.

מצד שני אם $T \models_t A$ כאשר T מכילה רק פסוקים.

אז יש מבנה M וסביבה במבנה המספקת את T (ולכן T נכונה), אך לא מספקת את A (ולכן A לא נכונה), ולכן $T \not\models_v A$.
לכן כל דוגמא נגדית לכך שיחסי הנביעה זהים צריכה שיהיה בה T עם נוסחה שאינה פסוק למשל:

$$p(x) \models \forall x p(x)$$

תרגיל: הראו שמשפט הדדוקציה לא חל עבור $\neg$ נביעה, כלומר לכל תורה T ולכל נוסחאות A, B

$$T, A \models_v B \iff T \models_v A \rightarrow B$$

שגוי!

פתרון: ניקח T ריקה, $A = p(x)$ ו $B = \forall x p(x)$ ראינו כי $p(x) \models_v \forall x p(x)$ ונראה כעת כי

$$\not\models_v p(x) \rightarrow \forall x p(x)$$

כלומר צריך למצוא מבנה M שבו יש השמה ρ כך ש

$$[p(x) \rightarrow \forall x p(x)]_\rho = f$$

ניתן למשל לקחת M בו $D^M = \{0, 1\}$ ו $p^M = \{1\}$ $p^M(0) = f, 1 \in p^M$ קבוע ρ $p^M(1) = t, 1 \in p^M$

$$[p(x) \rightarrow \forall x p(x)]_\rho = h_{\rightarrow} \left(p^M(p(x)), [\forall x p(x)]_\rho \right) = h_{\rightarrow}(t, f) = f$$

תרגיל: $T \models_t A$ אמ"מ $T \{d/x\} \models_t A \{d/x\}$ כאשר $T \cup \{A\}$ קבוצת נוסחאות בהם לא מופיע הקבוע d .

פתרון: נראה כל כיוון בנפרד. נשתמש הרבה ב: לכל נוסחה B וסביבה ρ במבנה מסויים.

הקשר:

$$[B \{d/x\}]_\rho = [B]_{\rho\{[d]_\rho/x\}}$$

נניח $T \models_t A$ יהיו מבנה M וסביבה ρ המספקת את $T \{d/x\}$.

צ"ל ש ρ מספקת את $A \{d/x\}$

נפעיל את הקשר על כל נוסחה ב $T \{d/x\}$ ונקבל ש T מסתפקת על ידי $p \{[d]_\rho/x\}$

ולכן מהנתון גם A מסתפקת בסביבה זו.

נשתמש שוב בקשר ונקבל ש $A \{d/x\}$ מסתפקת ב p כרצוי.

כיוון שני:

נניח $T \{d/x\} \models_t A \{d/x\}$. יהיו מבנה M וסביבה ρ המספקת את T צ"ל שמספקת גם את A .

כעת נגדיר מבנה N שזהה למבנה M פרט ל $d^N = p(x)$ הסביבה ρ גם סביבה של N .

נשים לב שלכל נוסחה $B \in T \cup \{A\}$ מתקיים

$$[B]_\rho^M = [B]_\rho^N$$

לכן אנו יודעים ש ρ מספקת את T במבנה N , וגם מספיק להראות ש $[A]_\rho^M = [A]_\rho^N = t$

מהפעלת הקשר על כל $B \in T \cup \{A\}$ נקבל

$$[B \{d/x\}]_\rho^N = [B]_{\rho\{[d]_\rho/x\}}^N = [B]_{\rho\{p(x)/x\}}^N = [B]_\rho$$

מהנתון, עבור $B=A$ נקבל $[A]_\rho^N = t$ וסיימנו.

מסקנה 0.4 ניתן לעבור מנוסחאות לפסוקים על ידי שימוש בתרגיל זה עבור כל משתנה שמופיע חופשי $T \cup \{A\}$ ובכך לעבור ל $\neg$ נביעה.