

תרגול 9

24 במאי 2017

הגדרה 0.1 נוסחה בצורה נורמלית PNF אם היא $Q_1 x_1, \dots, Q_n x_n \varphi$ כאשר φ ללא כמתים.

טענה 0.2 לכל נוסחה יש נוסחה בצורת PNF השקולה לה.

תרגיל: העבירו את $\varphi \{c/z\}$ ל-PNF:

$$\varphi = (\exists x \forall y R(x, y, z)) \rightarrow (\neg \exists x \forall y p(x, y))$$

פתרון:

$$\neg \exists x \forall y p(x, y) \equiv \forall x \neg \forall y p(x, y)$$

$$\equiv \forall x \exists y \neg p(x, y)$$

$$\equiv \forall v \exists w \neg p(v, w) - (\alpha) \text{ rule}$$

שקילויות:

$$x \notin \text{Free}(A) (\exists x B) \rightarrow A \equiv \forall x (B \rightarrow A)$$

$$x \notin \text{Free}(A) (\forall x B) \rightarrow A \equiv \exists x (B \rightarrow A)$$

$$A \rightarrow \forall x B \equiv \forall x (A \rightarrow B)$$

המשך פתרון:

* לסוגריים מסולסלים יש כאן משמעות זהה לעגולים, נוסף רק כדי שניהיה נוח להבדיל בין הסוגרים

$$\varphi \{c/z\} \equiv (\exists x \forall y R(x, y, c)) \rightarrow (\forall v \exists w \neg p(v, w))$$

$$\equiv \forall x \{(\forall y R(x, y, c)) \rightarrow (\forall v \exists w \neg p(v, w))\}$$

$$\equiv \forall x \exists y \{R(x, y, c) \rightarrow (\forall v \exists w \neg p(v, w))\}$$

$$\equiv \forall x \exists y \forall v \exists w (R(x, y, c) \rightarrow \neg p(v, w))$$

מוסכמה : נקרא לקבועים גם פונקציות, פשוט מערכיות 0 (מקבלות 0 משתנים).

אלגוריתם: סקולהם לציאת פסוק אוניברסאלי שקול מבחינת ספיקות לנוסחה.

- קלט: נוסחה φ במילון Σ
 פלט: נוסחה ללא כמתים φ' במילון Σ'
 א) הרחבה של Σ בפונקציות
 ב) $sk(\varphi) := \varphi^{\wedge}$ ספיקה אם ורק אם φ ספיקה.

פסאודו קוד: .

1. החלפת המשתנים החופשיים של φ בקבועים חדשים

2. להעביר לצורת PNF

3. סילוק כמותי $\exists$ מבחוץ פנימה:

$$\forall x_1, \dots, x_n \exists y \tau \Rightarrow \forall x_1, \dots, x_n \tau \{f(x_1, \dots, x_n) / y\}$$

ניתן להרחיב את האלגוריתם לקבוצת נוסחאות במקום נוסחה יחידה

פסאודו קוד: .

1. כמו בסקולהם באחידות

2. כמו בסקולהם

3. כמו בסקולהם בנפרד

תרגיל: מצא נוסחה ללא כמתים כך שהסגור האוניברסלי שלה ספיק אמ"מ φ ספיקה.

פתרון: נשתמש באלגוריתם על φ

1. נקבל את $\varphi \{x/z\}$

2. העברנו ל-PNF בתרגיל הקודם

3.

$$\forall x \exists y \forall v \exists w (R(x, y, x) \rightarrow \neg p(v, w))$$

$$\Rightarrow \forall x \forall v \exists w (R(x, f(x), x) \rightarrow \neg p(v, w))$$

$$\Rightarrow \forall x \forall v (R(x, f(x), x) \rightarrow \neg p(v, g(x, v)))$$

$$= sk((R(x, f(x), x) \rightarrow \neg p(v, g(x, v))))$$

כאשר GF, C סימני פונקציה חדשים

קיבלנו נוסחה ללא כמתים $R(x, f(x), c) \rightarrow \neg p(v, g(x, v))$

שהסגור האוניברסלי שלה ספיק אמ"מ φ ספיקה

הגדרה 0.3 מבנה הרברנד

מבנה שבו לכל איבר בתחום יש שם עצם סגור יחודי המפורש אליו.

$$\forall a \exists ! t_a [[t_a]]^H = a$$

הערה 0.4 אם במילון אין קבוע - אין מבנה הרברנד כי אין ש"ס.

אם במילון יש קבוע, אז יש מבנה הרברנד טבעי:

נבחר את התחום להיות בדיוק כל שמות העצם הסגורים,

$$f^H(t_1, \dots, t_n) = f(t_1, \dots, t_n)$$

פירושי היחסים שרירותיים.

תרגיל: הוכיחו\הפריכו שמבנים הבאים הם מבני הרברנד (המילון יהיה ברור מההקשר)

1. $\langle \mathbb{N}, 0, succ \rangle$ -

כן: למשל $2 = \llbracket succ(succ(0)) \rrbracket_\rho$

2. $\langle \mathbb{Z}, 0, succ, pred \rangle$

לא: אין יחידות $\llbracket 0 \rrbracket_\rho = \llbracket pred(succ(0)) \rrbracket_\rho$

3. $\langle [0, 1), \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \dots, +_{\text{mod } 1} \rangle$

לא: משיקולי עוצמה

4. $\langle \{a, b\}^*, \varepsilon, a^1, b^1 \rangle$

כן: למשל $abb = \llbracket a(b(b(\varepsilon))) \rrbracket_\rho$

שאלה: האם אתם מסוגלים לבנות מילון ומבנה הרברנד עבורו כך שתחום המבנה הוא כל העצים הבינאריים?

הגדרה 0.5 אם $\varphi = \varphi^{\forall}$ כאשר φ' חסרת כמתים (כלומר φ פסוק אוניברסלי) נסמן $GrIns(\varphi)$ את קבוצת כל הפסוקים המתקבלים מ' φ' על ידי הצבות. עבור תורה אוניברסלית Γ נסמן:

$$GrIns(\Gamma) = \cup_{\varphi \in \Gamma} GrIns(\varphi')$$

משפט 0.6 במילון עם סימן קבוע (וללא שיוויון) תורה אוניברסלית Γ מקיימת Γ ספיקה אמ"מ $GrIns(\Gamma)$ ספיקה.

תרגיל (שלא נסיים): הראו כי

$$\varphi_1, \varphi_3 \models \varphi_4$$

$$\varphi_1 = \forall x (s(x) \rightarrow \forall y (p(y) \rightarrow A(x, y)) \leftrightarrow E(x))$$

$$\varphi_3 = \exists y (p(y) \wedge \forall x (s(x) \rightarrow \neg a(x, y)))$$

$$\varphi_4 = \neg \exists x (s(x) \wedge \exists (x))$$

$\Gamma = \{\varphi_1, \varphi_3, \neg \varphi_4\}$ אינה ספיקה $\iff \varphi_1, \varphi_3 \models \varphi_4$
 $GrIns(sk(\Gamma))$ אינה ספיקה $\iff$
 וכעת נשתמש בקומפקטיות של תורת הפסוקים...