

תרגול 7

10 במאי 2017

מושגים במשתנים:

הגדרה 0.1 מופע של משתנה בנוסחה D מוגדר להיות חופשי\קושר מופעים\קשור למופע באופן הבא:

1. אם D אטומי, כל המופעים חופשיים
2. אם $D = A \wedge B$ אז המופעים כפי שהם ב A ו B
3. אם $D = \forall x A$ אזי המופע x החדש קושר את כל המופעים החופשיים ב A

הגדרה 0.2 הנוסחה $D\{t/x\}$ מוגדרת כך:

- אם D אטומי, מחליפים כל x ב t
 - אם $D = \neg A$ אז $D\{t/x\} = \neg A\{t/x\}$
 - אם $D = \exists y A$ אז:
- אם $y = x$ אז $D\{t/x\} = D$
- אחרת אם y לא נמצא ב t , אז $D\{t/x\} = \exists y A\{t/x\}$
- אחרת $D\{t/x\} = \exists z (A\{z/y\})\{t/x\}$ חדש z

משמעות:

הגדרה 0.3 מבנה $M = \langle D, I \rangle$ כאשר D נקרא תחום והוא קבוצה לא ריקה

פירוש לסימונים: פונקציה מהמילון

1. לקבוע $I(c) \in D$: c
 2. לפונקציה $I(f) : D^n \rightarrow D$: מקומית f
 3. ליחס $I(R) \subseteq D^n$: מקומי R
- השמה **במבנה** היא פונקציה מקבוצת המשתנים ל D

ערך של שם עצם ב ρ :

$$[[x]]_\rho = \rho(x)$$

$$[[c]]_\rho = I(c)$$

$$[[f(t_1, \dots, t_n)]]_\rho = I(f)(t_1, \dots, t_n)$$

ערך של נוסחה ב ρ :

$$[[R(t_1, \dots, t_n)]]_\rho = t \iff \langle [[t_1]]_\rho, \dots, [[t_n]]_\rho \rangle \in I(R)$$

$$[A \wedge B]_\rho = h_\wedge ([A]_\rho, [B]_\rho)$$

$$[\forall y A]_\rho = t \iff \forall a \in D. [A]_{\rho\{a/y\}} = t$$

משפט 0.4 לכל זוג p_1, p_2 , אם $p_1|_\Delta = p_2|_\Delta$ לקבוצת המשתנים Δ אז:

$$[\varphi]_{\rho_1} = [\varphi]_{\rho_2}$$

$$[t]_{\rho_1} = [t]_{\rho_2}$$

אם אין משתנים חופשיים מוחץ ל A ב t, φ
* ללא הוכחה

משפט 0.5 לכל זוג p_1, p_2 , אם $p_1|_\Delta = p_2|_\Delta$ לקבוצת המשתנים Δ אז:

$$[s\{t/x\}]_\rho = [s]_{\rho\{[t]_\rho/x\}}$$

$$[\varphi\{t/x\}]_\rho = [\varphi]_{\rho\{[t]_\rho/x\}}$$

* ללא הוכחה

הגדרה 0.6 נאמר שנוסחה ספיקה במבנה מסויים אם קיימת סביבה המספקת אותה.

הגדרה 0.7 נאמר שנוסחה נכונה במבנה מסויים אם כל סביבה מספקת אותה.

הגדרה 0.8 נאמר שנוסחה ספיקה אם היא ספיקה במבנה כלשהו

הגדרה 0.9 נאמר שנוסחה תקפה אם היא נכונה בכל מבנה

תרגיל: לכל נוסחה φ , הראו כי:

$$\bullet (\exists \delta \forall \varepsilon \varphi) \rightarrow (\forall \varepsilon \exists \delta \varphi) \text{ תקפה}$$

$$\bullet (\forall \varepsilon \exists \delta \varphi) \rightarrow (\exists \delta \forall \varepsilon \varphi) \text{ ספיקה}$$

פתרון: תהי נוסחה φ מעל מילון כלשהו.
יהי מבנה M והשמה ρ במבנה.
עבור הראשונה:

$$[(\exists \delta \forall \varepsilon \varphi) \rightarrow (\forall \varepsilon \exists \delta \varphi)]_\rho$$

$$= h_{\rightarrow} ([(\exists \delta \forall \varepsilon \varphi)]_\rho, [(\forall \varepsilon \exists \delta \varphi)]_\rho)$$

אם $f = \llbracket (\exists \delta \forall \varepsilon \varphi) \rrbracket_\rho$ אז סיימנו.
 אחרת, לפי ההגדרה יש $a \in D$ כך ש $\llbracket \forall \varepsilon \varphi \rrbracket_{\rho\{a/\delta\}} = t$ כלומר,
 יש $a \in D$ כך שלכל $b \in D$

$$\llbracket \varphi \rrbracket_{\rho\{a/\delta\}\{b/\varepsilon\}} = t$$

בפרט לכל $b \in D$ יש $a \in D$ (אותו אחד ממקודם) כך ש

$$\llbracket \varphi \rrbracket_{\rho\{b/\varepsilon\}\{a/\delta\}} = t$$

ולכן לכל $b \in D$

$$\llbracket \exists \delta \varphi \rrbracket_{\rho\{b/\varepsilon\}}$$

ולכן

$$\llbracket (\forall \varepsilon \exists \delta \varphi) \rrbracket_\rho = t$$

סה"כ, כך או כך הערך הוא t ולכן הנוסחא אכן תקפה. (כי ρ מ1 שבחרנו שרירותיים)
 עבור הסעיף השני, קל לבדוק שהנוסחה נכונה במבנה עם איבר בודד.

תרגיל: הראו כי

$$\forall x \varphi \{x/z\} \equiv \forall y \varphi \{y/z\}$$

לכל נוסחה φ בה x, y אינם חופשיים.

פתרון: לכל $a \in D$ ולכל w שאיינו חופשי ב- φ :

$$\llbracket \varphi \{w/z\} \rrbracket_{\rho\{a/w\}} = \llbracket \varphi \rrbracket_{\rho\{a/w\}} \left\{ \llbracket w \rrbracket_{\rho\{a/w\}/z} \right\} = \llbracket \varphi \rrbracket_{\rho\{a/z\}}$$

ומכאן ניתן להסיק

$$\llbracket \forall x \varphi \{x/z\} \rrbracket_\rho = \llbracket \forall y \varphi \{t/z\} \rrbracket_\rho$$