

תרגול 5

26 באפריל 2017

ב HPC לכל פסוקים A,B,C

1.

$$Ax.1 \frac{}{A \rightarrow (B \rightarrow A)}$$

2.

$$Ax.2 \frac{}{(A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow A \rightarrow C}$$

3.

$$Ax.3 \frac{}{(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (\neg A \rightarrow B) \rightarrow A}$$

4.

$$MP \frac{A \quad A \rightarrow B}{B}$$

למה 0.1 לכל פסוק A מתקיים $\vdash_{HPC} A \rightarrow A$

משפט 0.2 לכל תורה T (קבוצה של פסוקים) ופסוקים A,B
אם מתקיים $T, A \vdash B$ אז $T \vdash A \rightarrow B$

תרגיל: לכל A,B,C פסוקים

$$A \rightarrow B, B \rightarrow C \vdash A \rightarrow C$$

תרגיל: לכל A,B,C פסוקים

$$A \rightarrow (B \rightarrow C) \vdash B \rightarrow (A \rightarrow C)$$

פתרון: די להראות שמתקיים $A \rightarrow B \rightarrow C, B, A \vdash C$
משום שאז נפעיל את משפט הדדוקציה פעמיים
אכן: (סדרת הוכחה)

1. asp A

2. asp B

$$3. \text{asp } A \rightarrow B \rightarrow C$$

$$4. \text{MP}(1)(3) \ B \rightarrow C$$

$$5. \text{MP}(2)(4) \ C$$

תרגיל: הוכיחו כי לכל פסוקים A,B

$$\vdash \neg \neg B \rightarrow B \quad \text{א)}$$

$$\vdash (\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B) \quad \text{ב)}$$

פתרון:

$$1. \text{Lem id } \neg B \rightarrow \neg B$$

$$2. \text{Ax.3 } (\neg B \rightarrow \neg \neg B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg B) \rightarrow B$$

$\vdots$

$$3. \text{Lem flip}(2) \ (\neg B \rightarrow \neg B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg \neg B) \rightarrow B$$

$$4. \text{MP}(1)(3) \ (\neg B \rightarrow \neg \neg B) \rightarrow B$$

$$5. \text{Ax.1 } \neg \neg B \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg \neg B)$$

$$6. \text{Lem Comp}(5)(4) \ \neg \neg B \rightarrow B$$

תרגיל: הראו כי הנוסחים הבאים לעיקביות של תורה שקולים (HPC)

• קיים פסוק B כך ש $T(\mathcal{K}) \models B$

• לכל פסוק A מתקיים $T(\mathcal{K}) \models A$ או $T(\mathcal{K}) \models \neg A$

ראינו בהרצאה כי

$$\text{Explosion} : \vdash A \rightarrow (A \rightarrow B)$$

נראה סדרת הוכחה.

$$\text{Lem}(\text{exp}) \vdash A \rightarrow A \rightarrow B$$

⋮

$$T \vdash A \rightarrow A$$

⋮

$$T \vdash A \vdash A$$

$$\text{MPx2} \vdash B$$

$$T \vdash B \text{ ולכן}$$

הערה 0.3 נאותות ושלמות

$$T \vdash A \Rightarrow T \models A \text{ :נאותות}$$

$$T \vdash A \Leftarrow T \models A \text{ :שלמות}$$

תרגיל: נוסף קשר חד מקומי $\boxtimes$

לשפת הפסוקים. ונוסף לHPC את האקסיומה $\boxtimes(A \rightarrow B) \rightarrow (\boxtimes A \rightarrow \boxtimes B)$ ומצאו פונקציית את $h_{\boxtimes}$ כך שהמערכת נאותה וגם לא שלמה.

פתרון: תחילה נשים לב כי אם ניקח את הפונקציה הקבוע $h_{\boxtimes} = f$, אז האקסיומה היא טאוטולוגיה. עבור ρ שרירותי

$$[[\boxtimes(A \rightarrow B) \rightarrow (\boxtimes A \rightarrow \boxtimes B)]]_{\rho}$$

$$h_{\rightarrow} \left([[\boxtimes(A \rightarrow B)]]_{\rho}, [[(\boxtimes A \rightarrow \boxtimes B)]]_{\rho} \right)$$

$$h_{\rightarrow} \left(h_{\boxtimes} \left([[(A \rightarrow B)]]_{\rho} \right), [[(\boxtimes A \rightarrow \boxtimes B)]]_{\rho} \right)$$

$$h_{\rightarrow} \left(f, [[(\boxtimes A \rightarrow \boxtimes B)]]_{\rho} \right) = t$$

ולכן על ידי חזרה על הוכחת הנאותות של HPC בצירוף אקסיומה זו, נקבל שהמערכת נאותה.

ולכן בפרט $\boxtimes p_1, H, \boxtimes p_1$ כי $\boxtimes p_1 \not\models H$ והמערכת נאותה.

כעת ניקח את הפונקציה הקבועה $h_{\boxtimes} = t$. שוב האקסיומה היא טאוטולוגיה ולכן שוב המערכת נאותה מצד שני, המערכת אינה שלמה כי $\boxtimes p_1 \not\models H$ אבל $\boxtimes p_1 \models H$