

תרגול 3 לוגיקה

29 במרץ 2017

בשיעור הקודם לא היה לנו הבדל בין $\rightarrow$ ל- $\vee$, היום נדבר על משמעות הקשרים **משמעות:**

קעת נגדיר מושגים הנותנים משמעות לנוסחאות.

השמה\סביבה היא פונקציית מקבוצת המשתנים אל הקבוצה הבינארית $\{T, F\}$ ערך של נוסחא D בסביבת ρ יסומן $\llbracket S \rrbracket_\rho$ ומוגדר להיות.

(1) אם D משתנה אזי $\llbracket D \rrbracket_\rho = \rho(D)$

(2) אם $D = \neg A$ אזי $\llbracket D \rrbracket_\rho = h_\neg(\llbracket A \rrbracket_\rho)$

(3) אם $D = A \circ B$ אזי $\llbracket D \rrbracket_\rho = h_\circ(\llbracket A \rrbracket_\rho, \llbracket B \rrbracket_\rho)$

הגדרה 0.1 נאמר שסביבה מספקת נוסחא אם ערכה בה הוא T

נאמר שנוסחא היא ספיקה אם קיימת סביבה שמספקת אותה

סתירה אם לא קיימת סביבה כזאת

טאוטולוגיה אם כל סביבה כזאת

נאמר שקבוצת נוסחאות ספיקה אם יש סביבה שמספקת את כל הנוסחאות בה

נאמר ששתי נוסחאות (או קבוצות) שקולות אם בדיוק אותן סביבות מספקות אותן

הערה 0.2 כל הטאוטולוגיות שקולות וכן כל הסתירות

תרגיל:

הוכיחו או הפריכו:

(1) אם A ספיקה או B ספיקה אז $A \vee B$ ספיקה

(2) אם A ספיקה וגם B ספיקה אז $A \wedge B$ ספיקה

פתרון:

(1) הוכחה: נניח A ספיקה אזי יש סביבה ρ שמספקת אותה

$$\llbracket A \vee B \rrbracket_\rho = h_\vee(\llbracket A \rrbracket_\rho, \llbracket B \rrbracket_\rho) = h_\vee(T, \llbracket B \rrbracket_\rho) = T$$

לכן $A \vee B$ ספיקה המקרה בו B ספיקה דומה.

(2) הפרכה: $B = \neg P_1$ $A = P_1$

אזי ברור שתיתן ספיקות אך מתקיים $A \wedge B$ אינה ספיקה, כי כל סביבה שמספקת את A לא מספקת את B ולהפך.

תרגיל:

תהייה נוסחאות B, A להן משתנה משותף יחיד P הוכיחו כי אם $P \rightarrow (A \rightarrow B)$ טאוטולוגיה אזי:

$A \rightarrow \neg P$ טאוטולוגיה או $P \rightarrow B$ טאוטולוגיה

פתרון:

נוכיח את הקונטרה פוזיטיבי. נניח שגם $A \rightarrow \neg P$ וגם $P \rightarrow B$ אינן טאוטולוגיות.

אזי יש ρ_1 עבורה $\llbracket P \rightarrow \neg A \rrbracket_{\rho_1} = F$

ו ρ_2 עבורה $\llbracket P \rightarrow B \rrbracket_{\rho_2} = F$

מתקיים: $\llbracket P \rightarrow \neg A \rrbracket_{\rho_1} = h_\rightarrow(\llbracket P \rrbracket_{\rho_1}, h_\neg(\llbracket A \rrbracket_{\rho_1}))$

לכן $\llbracket P \rrbracket_{\rho_1} = T, \llbracket A \rrbracket_{\rho_1} = T$

$\llbracket P \rightarrow B \rrbracket_{\rho_2} = h_\rightarrow(\llbracket P \rrbracket_{\rho_2}, \llbracket B \rrbracket_{\rho_2})$

לכן $\llbracket P \rrbracket_{\rho_2} = T, \llbracket B \rrbracket_{\rho_2} = F$

נגדיר השמה:

$$\rho(p) = \begin{cases} \rho_1(p) & p \in \text{Atoms}(A) \\ \rho_2(p) & \text{else} \end{cases}$$

מאחר ו $\rho(p) = \rho_1(p)$ לכל משתנה שמופיע ב A אזי $\llbracket A \rrbracket_\rho = \llbracket A \rrbracket_{\rho_1}$

בדומה עבור B , כי אם p מופיע ב B אז או שאינו מופיע ב A או ש $P = p$ ואז $\rho_1(p) = \rho_2(p)$ ו $\llbracket B \rrbracket_\rho = \llbracket B \rrbracket_{\rho_2}$

כעת נותר לשים לב כי

$$[[P \rightarrow A \rightarrow B]]_\rho = h_\rightarrow \left([[P]]_\rho, [[A \rightarrow B]]_\rho \right) = h_\rightarrow \left(T, h_\rightarrow \left([[A]]_\rho, [[B]]_\rho \right) \right) = h_\rightarrow (T, h_\rightarrow (T, F)) = F$$

0.3 הגדרה

תרגיל: הוכיחו כי $\Gamma \models \varphi$ אם ורק אם $\Gamma \cup \{\neg \varphi\}$ אינה ספיקה

פתרון: $\Gamma \cup \{\neg \varphi\}$ אמ"מ יש סביבה ρ שמספקת אותה אמ"מ ρ מספקת את Γ וגם לא מספקת את φ אמ"מ φ $\Gamma \not\models \varphi$

תרגיל:

1) הוכיחו כי כל קבוצה ספואית של נוסחאות שקולה לכל קונאונציה שלהם (על הדרך זה מראה ש^אסוציאטיבית וקומוטטיבית)

2) הוכיחו כי יש קבוצת נוסחאות שאינה שקולה לאף נוסחה

פתרון: 1) אינדוקציה על גודל הקבוצה. אם $n - 1$ טריוויאלי: נניח נכונות ל $n = k$ ותהי $\Gamma = \Delta \sqcup \{e\}$ מגודל $k + 1$ ולכן Δ שקולה ל $\Delta \setminus \{e\}$ לכל סדר וסדר פעולות.

תהי ρ השמה, Γ מסתפקת על ידי ρ אמ"מ Δ ו φ מסתפקות על ידה אמ"מ $\Delta \wedge \varphi_1 \wedge \Delta$ מסתפקות על ידה.

ρ הייתה שרירותית ולכן השקילות. הבחירה של $\varphi \in \Gamma$ הייתה שרירותית ולכן כיסינו את כל הקוניונקציות האפשריות.

(2) נראה כי אין נוסחא שמסתפקת על ידי השמה יחידה. אכן תהי φ שמסתפקת על ידי ρ . יהי משתנה p שא מופיע ב φ אז ההשמה ρ' שמזדהה עם

O

פרט ל $\rho(P) \neq \rho'(P)$ גם מספקת את φ .

כעת נשים לב כי קבוצת המשתנים שמסתפקת רק על ידי ההשמה הקבועה I

הערה 0.4

התרגיל הקודם רומז שלא אבל דווקא כן! זהו נקרא משפט הקומפקטיות ונוכיח אותו בהמשך הקורס