

תרגול 12

21 ביוני 2017

אקסיומות:

$$\vdash A \rightarrow B \rightarrow A$$

$$\vdash (A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow A \rightarrow C$$

$$\vdash (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A$$

$$A, A \rightarrow B \vdash B$$

$$\vdash \forall x A \rightarrow A \left\{ \frac{t}{x} \right\}$$

t שם עצם

$$\vdash \forall x (A \rightarrow B) \rightarrow A \rightarrow \forall x B$$

x אינו חופשי ב- A

$$A \vdash \forall x A$$

משפט 0.1 נאותות $\Gamma \models_v A \Leftarrow \Gamma \vdash_{HC} A$

למה 0.2 אם $\Gamma' \vdash_{HC} A' \Leftarrow \Gamma \vdash_{HPC} A$ כל פסוק אטומי מולחף בנוסחה

משפט 0.3 דדוקציה - לכל תורה T , נוסחה B , פסוק A

$$T, A \vdash_{HC} B \iff T \vdash_{HC} A \rightarrow B$$

תרגיל:

לכל תורה Γ ונוסחה ϕ

$$\Gamma \vdash_{HC} \phi \Rightarrow \Gamma \vdash_{HC} \exists x \phi$$

$$(\exists x \phi = \neg \forall x \neg \phi)$$

פתרון:

נניח $\Gamma \vdash_{HC} \phi$
 מספיק להראות $(MP) \vdash_{HC} \phi \rightarrow \exists x \phi$
 מאחר $\forall x (\neg \phi) \rightarrow \neg \phi$ זו אקסיומה, מספיק להראות $\vdash_{HC} (\forall x (\neg \phi) \rightarrow \neg \phi) \rightarrow \phi \rightarrow \exists x \phi$ (MP)
 מספיק להראות (לפי למה) $\vdash_{HPC} (p_1 \rightarrow \neg p_2) \rightarrow p_2 \rightarrow \neg p_1$
 כעת נותרנו עם תרגיל בתחשיב HPC דדקוציה פעמיים מספק

$$p_1 \rightarrow \neg p_2, p_2 \vdash_{HPC} \neg p_1$$

לפי דיכוטומיה (חלוקה למקרים) מספיק

$$p_1 \rightarrow \neg p_2, p_2, p_1 \vdash_{HPC} \neg p_1 \dots$$

$$p_1 \rightarrow \neg p_2, p_2, \neg p_1 \vdash_{HPC} \neg p_1$$

תרגיל:

תהיינה C_1, C_0 קבוצות פסוקים מעל אותו מילון ללא מודל משותף.
 הראו כי יש פסוק α כך שלכל מבנה M

$$M \models C_0 \Rightarrow M \models \alpha$$

$$M \models C_1 \Rightarrow M \models \neg \alpha$$

פתרון:

נתון $C_0 \cup C_1$ ללא מודל (לא ספיקה)
 מקומפקטיות יש תת קבוצה סופית שלה שאינה ספיקה, כלומר יש $\Pi_i \subseteq C_i$ סופית כך ש $\Pi_0 \cup \Pi_1$ לא ספיקה.
 כעת נגדיר $\varphi_i = \bigwedge_{\beta \in \Pi_i} \beta$ ונגדיר $\alpha = \varphi_0 \wedge \neg \varphi_1$
 אם $M \models C_0$ אזי $M \models \Pi_0$ אז $M \models \varphi_0$
 ולכן $M \models \Pi_1$ אזי $M \models \neg \varphi_1$ ולכן $M \models \alpha \equiv \neg \varphi_0 \vee \varphi_1$ וההמשך כמו מקודם.

תרגיל:

הראו כי הכלל

$$\frac{A \rightarrow B}{A \rightarrow \forall x B}$$

(כאשר x לא חופשי ב A קביל ב HC)

פתרון:

צ"ל שכל הוכחה שנעזרת בכלל הזה ניתן לתרגם להוכחה שאינה נעזרת בו.
 נראה

$$A \rightarrow B \vdash_{HC} A \rightarrow \forall x B$$

כאשר $x \notin F_v(A)$
 סדרת הוכחה:

$$A \rightarrow B$$

$$\forall x (A \rightarrow B)$$

$$\forall (A \rightarrow B) \rightarrow A \rightarrow \forall x B$$

$$A \rightarrow \forall x B$$

לכן בכל הוכחה ניתן להחליף שימוש בכלל זה הסדרה לעיל.
(יותר פורמלי להוכיח באינדוקציה על אורך ההוכחה)

תרגיל:

יהי מילון $\{+, \cdot, <, =\}$

ומבנה הממשיים מעל מילון המפרש את הסימנים באופן סטנדרטי

(א) הראו כי כל הרציונליים גדירים

(ב) הראו שיש הרחבה אלמנטרית M עם איבר אינפ':

יש $\varepsilon \in D^M$ כך ש $\varepsilon <^M r$ לכל $r \in D^M$ (רציונלי חיובי)

וגם $0 <^M \varepsilon$

פתרון:

$$(\forall y (x + y = y))$$

$$\varphi_0 = x + x = x$$

$$\varphi_1 = \forall y (x \cdot y = y)$$

לכל $n \in \mathbb{N}$

$$\varphi_{n+1} = \exists y \exists z \varphi_n(y) \wedge \varphi_1(z) \wedge y + z = x$$

$$(\exists y (\varphi_1) \wedge x = y + \dots + y)$$

$$\varphi_{-n} = \exists y \exists z \varphi_n(y) \wedge \varphi(z) \wedge x + y = z$$

לכל $m \in \mathbb{Z}$

$$\varphi_{\frac{m}{n}} = \exists y \exists z \varphi_n(y) \wedge \varphi_m(z) \wedge x \cdot y = z$$

(ב)

דומה לתרגיל עם המודלים שלא סטנדרטיים של האריתמטיקה נוסף קבוע ε חדש
לכל רציונלי חיובי $r > 0$

$$\omega_r = \exists y (\varphi_r(y) \wedge \varepsilon < y)$$

$$\omega_0 = \exists y \varphi_o(y) \wedge 0 < \varepsilon$$

Γ כל הפסוקים הנכונים ב R
אז כל תת קבוצה סופית של

$$\Gamma \cup \{\omega_r\}_{r \in \mathbb{Q}, r > 0}$$

מסתפק במבנה שמרחיב את R לפרש את ε כרציונלי מספיק קטן.
לכן לקבוצה כולה יש מודל.

נשכח במודל זה את הפירוש של ε וסיימנו

תרגיל ללא פתרון פורמלי:

הראו שהתכונה "בגרף פשוט יש מעגל מאורך $2m$ " אינה גדירה

פתרון:

אם זה היה גדיר (למשל על ידי קבוצה I)

נוסיף לקבוצה את "אין מעגל מאורך $2m$ "

לכל m טבעי