

31/3/19

5 הוראה

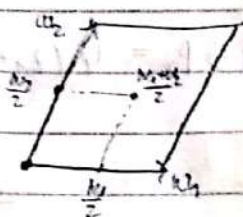
"חצאי מחצית"

$$L := \mathbb{Z}w_1 + \mathbb{Z}w_2$$

$$G_k(L) = \sum_{w \in L} \frac{1}{w^k}, \quad k \geq 3$$

$$g_2(L) = 60 G_4(L)$$

$$g_3(L) = 140 G_6(L)$$



נסמן $z = xw_1 + yw_2$
 חצאי מחצית = קווי צלע $z \in \mathbb{C}$
 כך ש- $z = xw_1 + yw_2$
 (למשל) $z \neq 0$ מתחת (חצאי)
 אותם יכול להיות $\frac{w_1}{2}, \frac{w_2}{2}, \frac{w_1+w_2}{2}$

$$e_j = g_0(w_j/2)$$

הערכים e_1, e_2, e_3 שונים זה מזה

(הם שונים)

מכאן נראה שהממוצע הדיסקרטיבי של e_1, e_2, e_3 הוא $g_0(0)$

$$(g_0)^2 = 4g_3 - g_2g_0 - g_3$$

המשוואה $4x^3 - g_2x - g_3 = 0$ היא משוואת הערכים e_1, e_2, e_3 (כאשר $x = g_0(w_j/2)$)

מכאן, e_1, e_2, e_3 הם שורשי המשוואה $4x^3 - g_2x - g_3 = 0$ או בצורה שקולה
 (לאו שווה, נקרא 3 השורשים של המשוואה, אכן -

$$4x^3 - g_2x - g_3 = 4(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)$$

ולכן נראה שהדיסקרטיבי הוא $\Delta(L) = \prod_{1 \leq i < j \leq 3} (e_i - e_j)^2$

$$\Delta(L) = \prod_{1 \leq i < j \leq 3} (e_i - e_j)^2 = \frac{1}{4^3} \cdot \text{disc}(4x^3 - g_2x - g_3) \quad (2)$$

הדיסקרטיבי של הפולינום

המשוואה $f(x) = g_0 \prod_{j=1}^d (x - e_j)$ היא $f(x) = a_d x^d + \dots + a_1 x + a_0$, כאשר $a_d \neq 0$, ולכן
 הערכים e_1, e_2, e_3 הם שורשי המשוואה $f(x) = 0$

$$\text{disc}(f) := a_d^{2(d-1)} \prod_{1 \leq i < j \leq d} (e_i - e_j)^2$$

הדיסקרטיבי

$$f \text{ אינה ממוצעת} \Leftrightarrow \text{disc}(f) \neq 0$$

המשוואה $\text{disc}(f) = 0$ מתארת את המקרים שבהם $e_i = e_j$ עבור $i \neq j$

$$V = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ e_1 & \dots & e_d \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e_1^d & \dots & e_d^d \end{pmatrix}$$

המטריצה של הערכים e_i

$$\det V = \prod_{i < j} (e_j - e_i)$$

הדיסקרטיבי

$$\det V V^T = \prod_{i < j} (e_j - e_i)^2$$

$$V \cdot V^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ e_1 & e_2 & e_3 \\ e_1^2 & e_2^2 & e_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & e_1 & e_1^2 \\ 1 & e_2 & e_2^2 \\ 1 & e_3 & e_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & \sum e_j & \sum e_j^2 \\ \sum e_j & \sum e_j^2 & \sum e_j^3 \\ \sum e_j^2 & \sum e_j^3 & \sum e_j^4 \end{pmatrix}$$

[illegible]

$$S_1^2 = S_2^2 + 2C_2, S_1 = C_1 \quad (1.1)$$

$$4x^3 - g_2x - g_3 = 4(x^3 - \frac{g_2}{4}x - \frac{g_3}{4}) \Rightarrow \det(4x^3 - g_2x - g_3) = 4^3 \det(x^3 - \frac{g_2}{4}x - \frac{g_3}{4}) = 4^2(4(\frac{g_2}{4})^3 - 27(\frac{g_3}{4})^2)$$

$$\Delta(L) = g_2^3 - 27g_3^2$$

13 במרץ 1973

"رحلتك 3/1"

Spitzenform
Cusp form

"הנהגה - נהגות"

$$G_k(\lambda L) = \lambda^{-k} G_k(L)$$

$$\Delta(L) \neq 0 \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \text{r.o.l.} \quad e_j = f_0(e_{j_2}) \cdot \frac{2\pi i}{1}$$

הוראה: ע"י 2007-2 לכתוב את ה- $\bar{C}$, $\bar{C}$ ו- $\bar{C}$ של $\bar{C}$

(1.7.75) : 5'200

$$-2.5, -0.11 - P(z) = p(z) - e, p(z) = p\left(\frac{w}{2}\right) \approx 2.5 - p(z), p \approx 1.5$$

b) auf die e. p.d. $\frac{U_1}{2}$ $\rightarrow$ nachw. 2 30V

המשפט הראשון: $f(\frac{w_1}{2}) \neq f(\frac{w_2}{2})$, מכאן נובע כי f איננה פונקציה קבועה.

— תלמוד

$$(f')^2 = 4f^3 - g_2 f - g_3$$

מסלול: $\varphi: G/L \rightarrow E_L$; $\varphi(gL) = \varphi(g)$

$$E_L = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid y^2 - 4x^3 + g_2x + g_3 = 0\}$$

הקבוצה L היא תת-חבורה של G , $P_2 = (x_2, y_2)$, $P_1 = (x_1, y_1)$

$$f(z) = p'(z) - A p(z) - B$$

כאשר $p(z)$ היא פונקציה רגולרית, A, B קבועים. נניח L היא תת-חבורה של G .

נניח $z_1, z_2, z_3 \in L$. אז $z_1 + z_2 + z_3 = (0+0+0) \in L$.
 נניח $z_1 = -z_2 - z_3$. אז $z_1 \in L$.

$$\Rightarrow z_1 + z_2 = -z_3 \text{ (מכיוון } L)$$

הכנסה ב-2:

הקבוצה L היא תת-חבורה של G , ולכן L היא תת-חבורה של G .

נניח L היא תת-חבורה של G .

נניח $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$.

$$P_1 \oplus P_2 = (x_3, y_3)$$

$$y_3 = y_1 + \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} (x_3 - x_1)$$

$$x_3 = -x_1 - x_2 + \frac{4}{y_1 - y_2} (y_1 - y_2)^2$$

נניח $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$, $P_3 = (x_3, y_3)$.

$$y = Ax + B, \quad y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$$

$$(Ax+B)^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$$

$$A^2x^2 + 2ABx + B^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$$

נניח L היא תת-חבורה של G .

$$4(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) = 4x^3 - Ax^2 - (g_2 + 2AB)x - (g_3 + B^2) = 0$$

נניח L היא תת-חבורה של G .

$$\frac{A^2}{y} = x_1 + x_2 + x_3$$

$$(x_3 - y_3) = 2P \neq P = (x_1, y_1)$$

נניח L היא תת-חבורה של G .

$$(y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3)$$

$$x_3 = -2x_1 + \frac{4}{y_1} \left(\frac{P'(x_1)}{2y_1} \right)^2$$

$$y_3 = y_1 + \frac{P'(x_1)}{2y_1} (x_3 - x_1)$$

$$2(x_1, 0) = \infty = (0)$$

משפט: $E(K) = \{(x,y) \in K^2 \mid y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3\}$ כאשר $K = \mathbb{Q}$ או $K \subset \mathbb{C}$ ו- $g_2, g_3 \in K$.

$$E(K) = \{(x,y) \in K^2 \mid y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3\}$$

הקבוצה $E(K)$ היא קבוצת נקודות על העקבה.

(Mordell, 1922): משפט מורדל - מספר הנקודות $E(K)$ סופי.

עבור $K = \mathbb{Q}$, $E(K)$ היא קבוצת נקודות רציונליות.

(A. Weil, 1928): משפט וייל - מספר הנקודות $E(K)$ סופי.

עבור $K = \mathbb{C}$, $E(K)$ היא קבוצת נקודות מרוכביות.

(1621) Bachet - בעיה של פיתרון של $y^2 = x^3 - 2$.

אם $x, y \in \mathbb{Q}$, $y^2 = x^3 - 2$ אז $x = c^2$ ו- $y = c^3 - 2$ עבור $c \in \mathbb{Q}$.

אם $c = 2$ אז $x = 4$ ו- $y = 6$.

$$x=3, y=5 \Rightarrow y^2 - x^3 = -2$$

הנקודה $(3, 5)$ היא נקודה על העקבה $y^2 = x^3 - 2$.

$$(y_2 = 5, y^2 = 4x^3 - 4c, x = x)$$

$$2P_1 = P_2 \Rightarrow X_2 = \frac{129}{100}, Y_2 = \frac{-383}{1000}$$

$$2P_2 = P_4 \Rightarrow X_4 = \frac{234092281}{76602}, Y_4 = (\dots)$$

הנקודה P_4 היא נקודה על העקבה $y^2 = x^3 - 2$.

הנקודה P_4 היא נקודה על העקבה $y^2 = x^3 - 2$.

הנקודה P_4 היא נקודה על העקבה $y^2 = x^3 - 2$.

$$y^2 - x^3 = -1 \Rightarrow (x,y) = (0,1), (1,0), (2,1), (2,-1), (5,8), (5,-8), (8,20), (8,-20), (17,72), (17,-72), (18,17), (18,-17), (43,282), (43,-282), (52,26), (52,-26), (53,147), (53,-147), (56,14), (56,-14), (61,25), (61,-25), (67,13), (67,-13), (72,18), (72,-18), (76,10), (76,-10), (92,30), (92,-30), (95,9), (95,-9), (108,108), (108,-108), (110,11), (110,-11), (122,22), (122,-22), (133,13), (133,-13), (147,12), (147,-12), (161,16), (161,-16), (176,14), (176,-14), (190,10), (190,-10), (208,8), (208,-8), (229,7), (229,-7), (242,11), (242,-11), (262,12), (262,-12), (282,18), (282,-18), (305,15), (305,-15), (328,16), (328,-16), (352,14), (352,-14), (377,13), (377,-13), (402,12), (402,-12), (428,11), (428,-11), (455,10), (455,-10), (482,9), (482,-9), (510,8), (510,-8), (539,7), (539,-7), (568,6), (568,-6), (598,5), (598,-5), (628,4), (628,-4), (659,3), (659,-3), (690,2), (690,-2), (722,1), (722,-1), (755,0), (755,0), (788,-1), (788,1), (822,-2), (822,2), (857,-3), (857,3), (892,-4), (892,4), (928,-5), (928,5), (965,-6), (965,6), (1003,-7), (1003,7), (1042,-8), (1042,8), (1082,-9), (1082,9), (1123,-10), (1123,10), (1165,-11), (1165,11), (1208,-12), (1208,12), (1253,-13), (1253,13), (1300,-14), (1300,14), (1348,-15), (1348,15), (1398,-16), (1398,16), (1450,-17), (1450,17), (1504,-18), (1504,18), (1560,-19), (1560,19), (1618,-20), (1618,20), (1678,-21), (1678,21), (1740,-22), (1740,22), (1804,-23), (1804,23), (1870,-24), (1870,24), (1939,-25), (1939,25), (2010,-26), (2010,26), (2083,-27), (2083,27), (2158,-28), (2158,28), (2236,-29), (2236,29), (2317,-30), (2317,30), (2400,-31), (2400,31), (2486,-32), (2486,32), (2577,-33), (2577,33), (2670,-34), (2670,34), (2766,-35), (2766,35), (2865,-36), (2865,36), (2967,-37), (2967,37), (3072,-38), (3072,38), (3180,-39), (3180,39), (3291,-40), (3291,40), (3404,-41), (3404,41), (3520,-42), (3520,42), (3639,-43), (3639,43), (3761,-44), (3761,44), (3886,-45), (3886,45), (4014,-46), (4014,46), (4145,-47), (4145,47), (4279,-48), (4279,48), (4416,-49), (4416,49), (4556,-50), (4556,50), (4699,-51), (4699,51), (4845,-52), (4845,52), (4994,-53), (4994,53), (5146,-54), (5146,54), (5301,-55), (5301,55), (5460,-56), (5460,56), (5622,-57), (5622,57), (5788,-58), (5788,58), (5958,-59), (5958,59), (6132,-60), (6132,60), (6310,-61), (6310,61), (6492,-62), (6492,62), (6678,-63), (6678,63), (6868,-64), (6868,64), (7062,-65), (7062,65), (7260,-66), (7260,66), (7462,-67), (7462,67), (7668,-68), (7668,68), (7878,-69), (7878,69), (8092,-70), (8092,70), (8310,-71), (8310,71), (8532,-72), (8532,72), (8758,-73), (8758,73), (8988,-74), (8988,74), (9222,-75), (9222,75), (9460,-76), (9460,76), (9702,-77), (9702,77), (9948,-78), (9948,78), (10200,-79), (10200,79), (10456,-80), (10456,80), (10717,-81), (10717,81), (11082,-82), (11082,82), (11452,-83), (11452,83), (11827,-84), (11827,84), (12207,-85), (12207,85), (12592,-86), (12592,86), (12982,-87), (12982,87), (13377,-88), (13377,88), (13777,-89), (13777,89), (14182,-90), (14182,90), (14592,-91), (14592,91), (15007,-92), (15007,92), (15427,-93), (15427,93), (15852,-94), (15852,94), (16282,-95), (16282,95), (16717,-96), (16717,96), (17157,-97), (17157,97), (17602,-98), (17602,98), (18052,-99), (18052,99), (18507,-100), (18507,100).$$

"משפט מורדל" - מספר הנקודות $E(K)$ סופי.

$$E(\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}^r \oplus F$$

כאשר r הוא מספר רנקים ו- F היא קבוצת טורסיון.

המספר r נקרא "מספר רנקים" ו- F נקרא "קבוצת טורסיון".

(Birch, Swinnerton-Dyer) - משפט בירך-סווינרטון-דייר.

המשפט קובע כי מספר הנקודות $E(K)$ סופי.

$$x^2 + y^3 = 1$$

$$x^3 + y^2 = 24$$

האם הפונקציה $f(z)$ היא פולינום?

דוגמה: $f(z) = z^2 + 1$

הפונקציה $f(z)$ היא פולינום אם ורק אם היא יכולה להיכתב בצורה $f(z) = a_n z^n + \dots + a_0$

$$\lambda \in \mathbb{C}^*, L' = L \quad \text{אם} \quad f(\lambda L) = \lambda^k f(L) \quad \text{עבור} \quad k \in \mathbb{Z}$$

הפונקציה $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$ היא פולינום של g_2, g_3 ו- $G_k(L) = \sum_{w \in L} w^{-k}$ היא פונקציה של L .

$g_2 = 60G_4, g_3 = 140G_6$ כאשר G_k היא פונקציית גורדון.

החבורה $H = \{z \mapsto \gamma z + \delta \mid \gamma \neq 0\}$ היא חבורת מופשטות של $\mathbb{C}$.

$$f(z) = F(\mathbb{Z}z + \mathbb{Z} \cdot 1)$$

הפונקציה F היא פולינום של z .

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k f(z) \quad \text{אם} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$$

הפונקציה f היא פולינום של z .

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) := F\left(\left\langle \frac{az+b}{cz+d}, 1 \right\rangle\right)$$

הפונקציה F היא פולינום של z .

$$\langle z, 1 \rangle = \langle az+b, cz+d \rangle = (cz+d) \langle \frac{az+b}{cz+d}, 1 \rangle$$

$$L' = \left\langle \frac{az+b}{cz+d}, 1 \right\rangle = (cz+d)^{-1} \langle z, 1 \rangle = (cz+d)^{-1} L$$

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = f(L') = \frac{1}{(cz+d)^k} f(L)$$

הפונקציה $f: H \rightarrow \mathbb{C}$ היא פולינום של z אם ורק אם היא יכולה להיכתב בצורה $f(z) = a_n z^n + \dots + a_0$

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k f(z) \quad \forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$$

$$\Delta = g_2^3 - 27g_3^2 = \sum_{0 \neq w \in L} \frac{1}{w^{12}} = G_{12}(L)$$

$$(f \text{ היא פולינום של } z) \iff f(z+1) = f(z), f\left(\frac{1}{z}\right) = z^k f(z) \iff k \text{ היא מספר שלם}$$

החבורה $SL_2(\mathbb{Z}) = \langle S, T \rangle$ היא חבורת מופשטות של $\mathbb{C}$.

$$f = e^{2\pi i z} \text{ היא פונקציה פ-ו של } f(z+1) = f(z)$$

$$H \twoheadrightarrow \mathbb{D}^* = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$

$$z \mapsto e^{2\pi i z}$$

22

158 m 104.7 - 003.116.21 1 01 003.116.21 1 003.116.21 1

הערה: תרגום משותף של המוסדות

מחבר: (משה) ד"ר מ"א

11. $213-1 \Rightarrow -121W$ -121 $P-1$ 21321 K

מאמרים: (א) ו (ב) : ארבעה

$$Q_{\infty}(r) = \lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(r)$$

$$1 \quad 5 \quad 1 \quad \frac{1}{1}$$

85 1

10. $\log_{10} 100 - \log_{10} 10 = \log_{10} 10$ Δ : 0.3010

$\text{Grav. (mm)} = 14.1 (4.177) = 14.1 - (14.1)$

Bar. 60 1- Penn (Carya porosa) 3m - 12m 10032

$$M_k = P(A) + S, \text{ כל } k \geq 2 \text{ נכון } \underline{\text{ע"פ}}$$

[illegible]

2. Flight - a cat 20 100 like up of S. 1852

, $SL_2(\mathbb{Z}) \ni I = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ist pers. κ el. $\mu_\kappa = 0 : \text{mod } 2$

$$f(\tau) = f\left(\frac{-1 \cdot \tau + 0}{0 \cdot \tau - 1}\right) = (0 \cdot \tau - 1)^k f(\tau) = (-1)^k f(\tau) = -f(\tau)$$

$f=0 \Leftarrow$

3.11. — 02. 1. $\Delta \in \mathcal{S}_{12}$: Goew

$$\begin{aligned} \Delta(\infty) &= g_2(\infty)^3 - 27 g_3(\infty) = [0 \cdot g_4(\infty)]^3 - 27 [1408 g_6(\infty)]^2 = \\ &= (105(4))^3 - 27 (2803(6))^2 \\ &= \text{---} \end{aligned}$$

(euler) : Goew

- f(1), $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ c''gen

$$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \quad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}$$